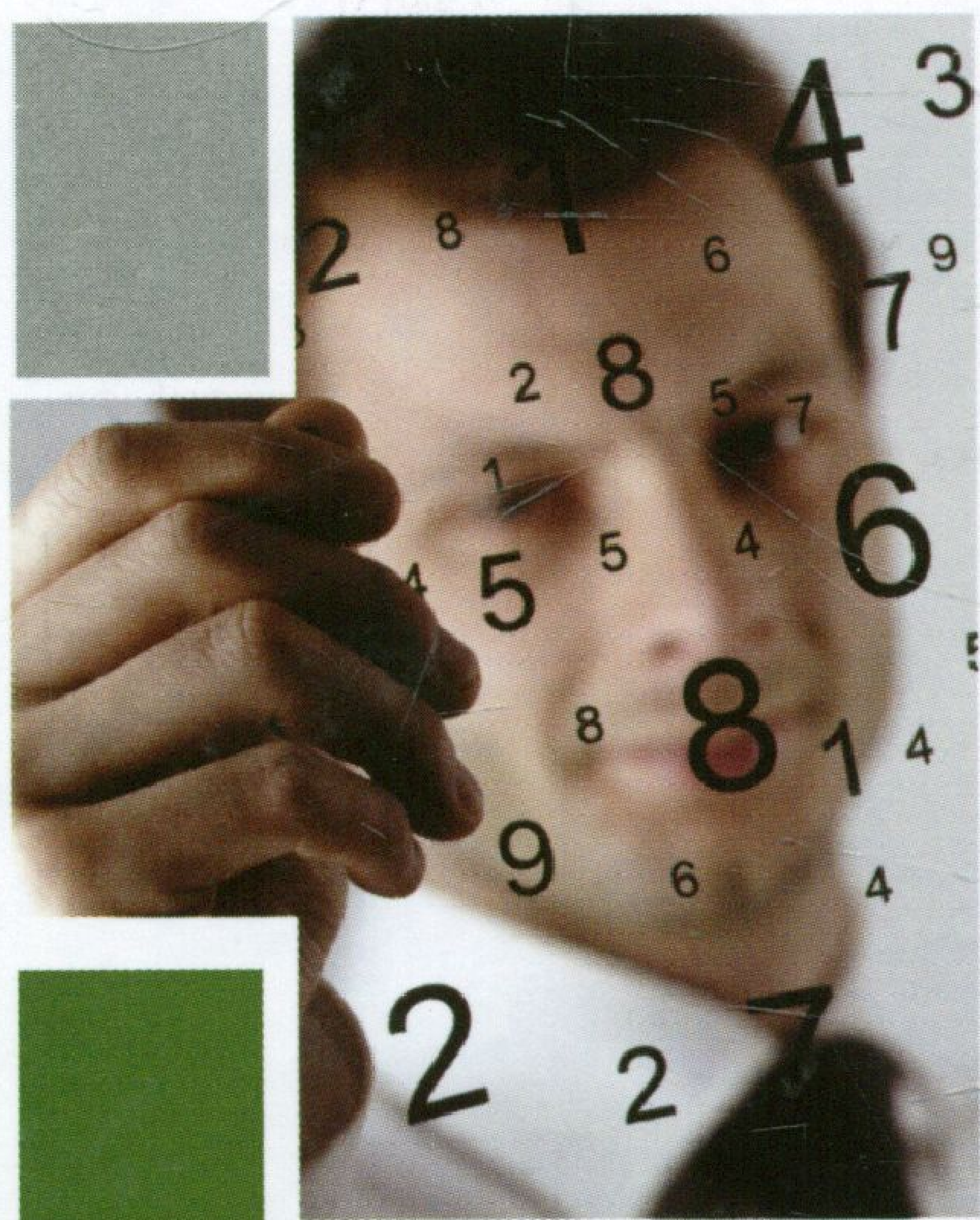
الرياضيات

والتحليل العددي



د. صفاء علي ناصر



اليازوري

الرياضيات
والتحليل العددي

الرياضيات والتحليل العددي

د. صفاء علي ناصر



الطبعة العربية الثانية – ٢٠١٥

رقم الإيداع 2014/3/1219

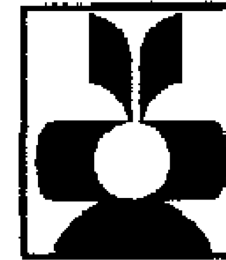
التدقيق اللغوي : ياسر سلامة

التحرير : هيئة تحرير

تصميم الغلاف : نضال جمهور

الصف والإخراج : أسمى جرادات

المطبعة : مطبعة برجي – بيروت



اليازوري

دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع

عمان – وسط البلد – شارع الملك حسين

هاتف: 4626626 6 962+ تلفاكس: 4614158 6 962+

ص. ب: 520646 الرمز البريدي: 11152

info@yazori.com www.yazori.com

الرياضيات والتحليل العددي

د. صفاء علي ناصر



المقدمة

تعد الرياضيات من العلوم التي لها تطبيقات كثيرة في اغلب العلوم النظرية والتطبيقية اذ يمكن الاستفادة منها في اغلب المجالات فضلا عن دورها المهم في توسيع مدارك الفرد وتنمية قدراته على التحليل والتفكير المنطقي والاستنتاج السليم.

لقد نالت الرياضيات اهتمام العرب فبرعوا فيها واغنوها باضافات مهمة في جوانب كثيرة.وكانت مؤلفاتهم الكثيرة في مجالات الاعداد وخواصها أذ كان كتاب "الجبر والمقابلة" للعالم العربي الخوارزمي خير دليل على ذلك فكان الاول من نوعه من حيث المادة العلمية والترتيب والتبويب.

يحتوي كتابنا الذي بين يديك على عشرة فصول عرضت فيها المادة العلمية بشكل مبسط يتلائم ومدارك الطلبة اذ تضمنت الفصول شرحا وافيا للطرق والنظريات معززا بالامثلة التي يحتاجها الطالب في هذه المرحلة من دراسته وبعد تخرجه وروعي في الكتاب تغطية مفردات مادة الرياضيات والتحليل العددي في اقسام أنظمة الحاسبات التابعة لهيئة التعليم التقني أ وأمل ان أكون قد اسديت خدمة علمية للطلبة والمعنيين في هذا المجال في توضيح الجوانب الاساسية النظرية والتطبيقية معززة بالامثلة.

والله الموفق

المؤلف

المحتويات




الفصل الأول
نظرية المجموعات وطرق العد

1-1 المجموعات

1-2 انواع المجموعات

1-3 عمليات على المجموعات:

1-4 جبر المجموعات

1-5 الازواج المرتبة والحاصل الديكارتي

1-6 رمز المجموع

1-7 التباديل والتوافيق

1-8 نظرية ذي الحدين



نظرية المجموعات وطرق العد

1-1 المجموعات SET

تعتبر المجموعة من المفاهيم الرئيسية في الرياضيات،ويمثل تجمع من الاشياء منقول مجموعة الطيور او مجموعة الحروف، ويرمز للمجموعة عادة باحد الاحرف الكبيرة (C,B,A,...) وان كل فرد من افراد المجموعة يسمى بالعنصر (Element) ويمثل باحد الحروف الصغيرة (c,b,a...).

1-1-1 طرق تعيين المجموعة،

هناك طريقتان لتعيين المجموعة هي:

أ. تعيين المجموعة اذا عرفت جميع عناصرها ويمكننا عندئذ كتابتها بذكر جميع عناصرها بين قوسين من نوع {   } مع وضع فارزة بين كل عنصرين متتاليين،فاذا رمزنا لمجموعة حروف كلمة Computer بـ A فاننا نكتب A={c,o,m,p,u,t,e,r} وان B={1,2,..,99} تعني أن B مجموعة عناصرها الأعداد الصحيحة الموجبة التي أقل من 100.

ب. يمكن تعيين المجموعة بذكر كل الخواص التي تميز عناصرها بحيث

يمكن باستخدام هذه الخواص ان نحدد بطريق ما اذا كان عنـصر مـا ينتمـي الى هـذه المجموعـة او لا ينتمـي لهـا. فمـثلا يمكـن كتابـة المجموعتين A-B السابقة بالشكل الاتي:

A={x:computerحرف من حروفx}

B={x\ 100 عدد صحيح موجب اقل من x}

كـما ان تغيـير ترتيـب العنـاصر في المجموعـات وارد ولكـن تكـرار العنصر اكثر من مرة واحدة عند كتابة المجموعة غير مسموح به.

1-1-2 الانتـــماء:

اذا كان a عنـصرا مـن المجموعـة A فاننـا نقـول ان a ينتمـي الى A ويكتب $x\in a$ ونقرا (a ينتمي الى x) اما اذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة x منقول (a لاينتمي الى x) ويكتب $x\notin a$.

مثال 1-1

اذا كانت Y={0,2,4,8,10,12} فان: $5\notin Y, 2\in Y, 1\notin Y, 4\in Y$

1.2 انواع المجموعات

1-2-1 المجموعة الخالية Empty Set

يقال للمجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر بانها مجموعة خالية،ويستخدم عادة الرمز ϕ الذي يقرأ (فاي) ليدل على المجموعة الخالية، كما يقال للمجموعة التي تتكون من عنصر واحد مجموعة احادية (Singleton set).

مثال 2-1

مجموعة الاعداد الطبيعية التي اكبر من 2 واصغر من 3 هي مجموعة خالية أي:

$$\phi=\{x \backslash x\in N, 2<x<3\}$$

حيث N تمثل مجموعة الاعداد الطبيعية

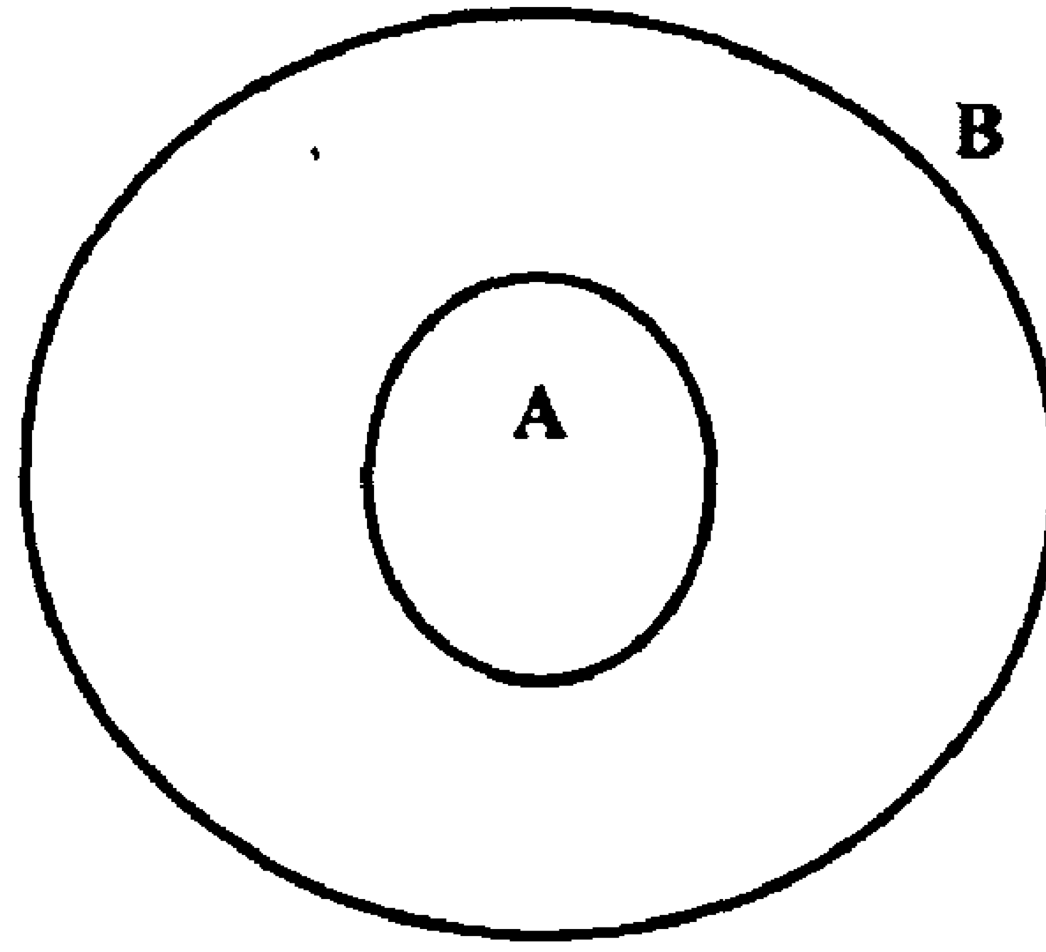
1-2-2 المجموعات الجزئية Subsets

يقال ان A مجموعة جزئية من المجموعة B اذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمي الى B وتكتب $A \subseteq B$ كما يمكن ان يقال ان المجموعة B حاوية للمجموعة A ويمكن ان تكتب $B \supseteq A$.

مثـال 3-1

لـتكن B مجموعـة طـلاب قـسم انظمـة الحاسـبات وان A مجموعـة طلاب الصف الاول انظمة حاسبات،فان كل طالب في الصف الاول هو طالب في القسم وعليه فان $B \subseteq A$.

ويمكن تمثيل ذلك بمخطط كما يلي:



يعية.

1-2-3 المجموعات المتساوية Equal Sets

يقال للمجموعتين B,A بانهما متساويتان اذا كان كل عنصر في A هو عنصر في B وكل عنصر في B هو عنصر في A وتكتب A=B.

مثـال 4-1

$B=\{4,1,5\}$, $A=\{1,4,4,5,5\}$ متســـــاويتـــان

مثـال 5-1

ليــــكن $X= \{x : -1 \le x < 4$ عدد صحيح $X\}$

$Y=\{-1,0,1,2,3\}$

فــان $X=Y$

مثـال 6-1 لتكن

$A=\{x: x^2 -3x = -2\}$

$B=\{2,1\}$ $C=\{1,2\}$

فــان

$A=B=C$

1-2-4 المجموعة المنتهية وغير المنتهية

Finite and Infinite Sets

يقــال للمجموعــة A انهــا مجموعــة منتهيــة اذا شــملت عــلى n مــن العناصر المختلفة وبخلافه تسمى المجموعة غير منتهية.

مثـال 6-1

1. ان المجموعــــة $A=\{a,b,c,d\}$ مجموعـــة منتهيـــة بيـــنما المجموعـــة $B=\{1,2,3,...\}$ غير منتهية.



2. مجموعة سكان الكرة الارضية منتهية،ولكن مجموعة الاعداد الطبيعية غيلر منتهية.

3. مجموعة عواصم الاقطار العربية مجموعة منتهية.

1-2-5 **المجموعة الشاملة** Universal Set

في اية دراسة يجب ان تكون هناك مجموعة معينة بحيث ان جميع المجموعات المختلفة المدروسة مجموعات جزئية لها وتدعى هذه المجموعة بالمجموعة الشاملة ويرمز لها بـ .

مثال 1-8

اذا كنا نتحدث عن مجموعة من اعداد صحيحة غير سالبة مثل:

A={1,3,5,7,9}   B={2,4,6,8}   C={0,1,2,9}

فيمكن اعتبار ان المجموعة U ={0,1,2,3,....} مجموعة شاملة

1.3 عمليات على المجموعات:

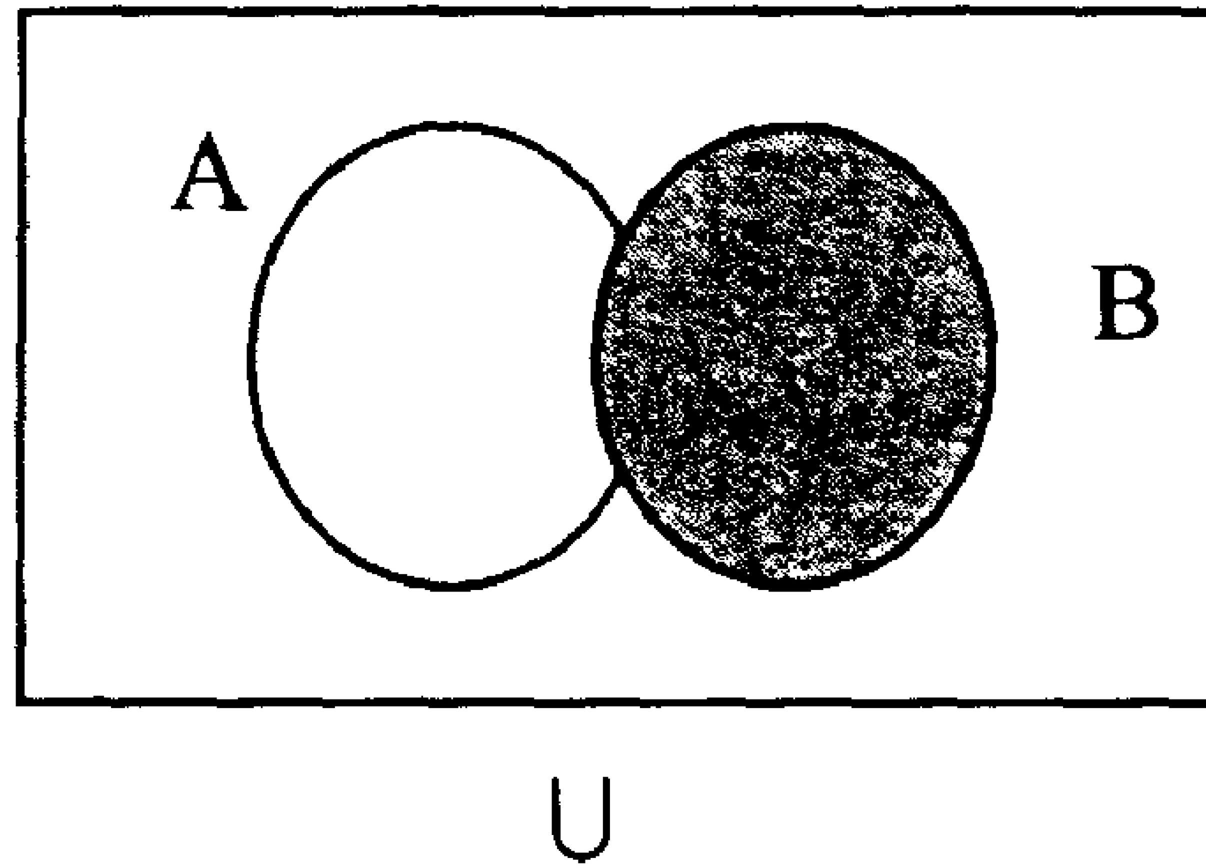
هناك بعض العمليات الاساسية التي ستتعرف عليها والتي نستطيع من خلالها ان نشكل مجموعات جديدة من مجموعات معلومة وهي مشابهة للعمليات الاولية الجبرية وهي:

1-3-1 الاتحاد The Union

اذا كانت B,A مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة على الاقل في احدى المجموعتين تسمى اتحاد المجموعتين ويرمز لها بـ $B \cup A$ أي ان:

$$A \cup B = \{X : X \in A \text{ or } X \in B\}$$

ويمكن تمثيل الاتحاد بين المجموعتين B,A كما يلي:



U

مثال 9-1

اذا كانت $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3,5\}$

فان $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

مثال 10-1

اذا كان $A=\{e,f,g,c\}$ و $B=\{a,b,c,d\}$

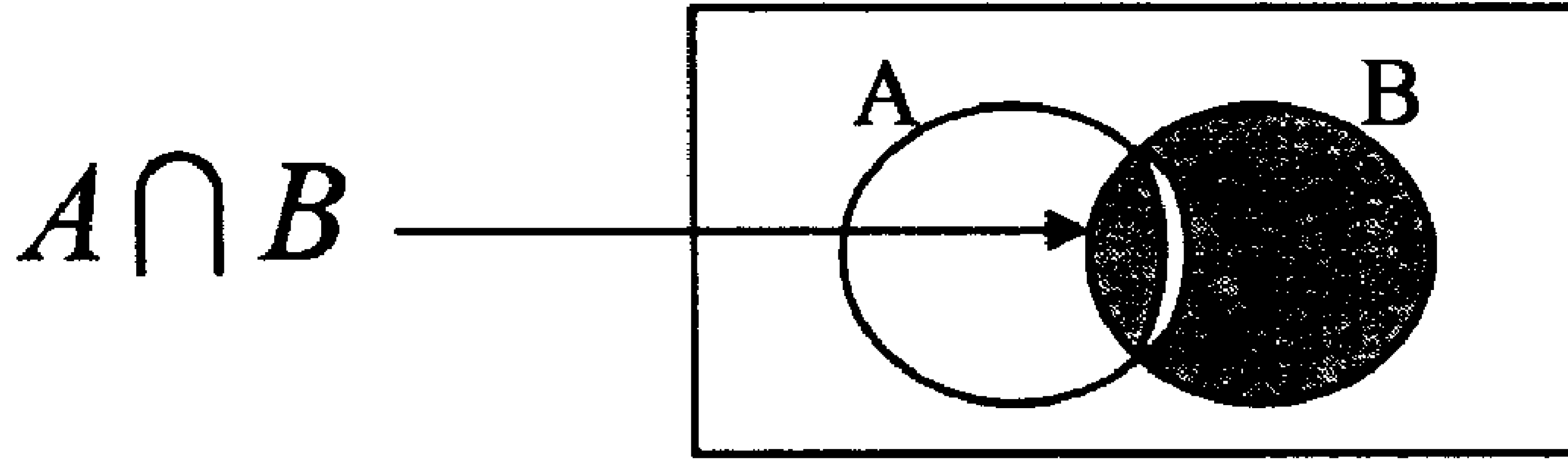
$$B \cup A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$$

1-3-2 التقاطع Intersection

لتكن B,A مجموعتين،فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي الى كل من A و B معا تسمى تقاطع المجموعتين ويرمز لها بـ B∩A ويطلق على ∩ برمز عملية التقاطع أي ان:

$$A \cap B = \{x : x \in A and x \in B\}$$

ويمكن تمثيل التقاطع بشكل كالاتي:



كما يمكن تعريف تقاطع عدة مجموعات كما يلي:

$$\cap_{i=1}^{n} A_i = A1 \cap A2 \quad \cap An$$

اذا كانت مجموعة تقاطع المجموعتين A و B مجموعة خالية فيقال لهما مجموعتان منفصلتان (disjoint sets).

مثال 1-11

اذا كانت A1 المجموعة العرفة كما يلي:

$A1=\{x:x=3y,y\in N\}$

وان $A2=\{x:x=2y,y\in N\}$

فـان

$A1 \cap A2=\{x:x=6y,y\in N\}$

مثال 1-12

لتكن $A1=\{3,6,9,10,5\}$

$A2=\{9,10,2,1,4\}$

$A3=\{5,2,6,10,3\}$

$A1 \cap A2=\{9,10\}$

$A1 \cap A3=\{5,6,10\}$

$A2 \cap A3=\{10,2\}$

$A1 \cap A2 \cap A3=\{10\}$

1-3-3 المتممة للمجموعة The Complement of a set

اذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U فالمجموعـة المكونة من عناصر U التي لا تنتمي الى A تـسمى متممـة المجموعـة A ويرمز لها بـ A^c

مثال 1-13

اذا كانت $U=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A=\{a,c,d,f\}$

فان $A^C =\{b,e\}$

مثال 1-14

اذا كانت المجموعة الشاملة هي طلبة قسم انظمة الحاسبات وكانت المجموعة A تمثل طلبة الصف الثاني في قسم الانظمة فان A^c تمثل طلبة قسم انظمة الحاسبات عدا طلبة الصف الثاني.

1-3-4 الفضلة The difference

اذا كانت B,A مجموعتين، فان المجموعة التي تحتوي على العناصر المنتمية لـ A وغير المنتمية لـ B تسمى فضلة A على B او فرق A عن B ويرمز لها بـ$A\backslash B$ او $A-B$.

مثال 1-15

اذا كانت $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

$B=\{2,3,4\}$

$A\backslash B=\{1,4,5,6\}$

$B\backslash A= \phi$

1.4 جبر المجموعات Algebra of sets

سنتطرق في هذه الفقرة للخواص الاساسية للعمليات ($\cup, \cap, /$) على المجموعات وسنعرض مثال لكل حالة للتوضيح:

1-4-1 قوانين التوزيع Distribution laws

اذا كانت لدينا المجموعات الثلاث C,B,A فان

أ. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ب. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

مثال 16-1

اذا كانت لدينا $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,5,6\}$

$C=\{2,5,6,1\}$

لاثبات القانون الاول

$B \cap C=\{1,2,5,6\}$ ⟶ $A \cap (B \cup C)=\{1,2,5\}$

ويمثل الطرف الايسر

$A \cap B=\{2,5\}$ $A \cap C=\{1,2\}$

الطرف الايمن

$(A \cap B) \cup (A \cap B)=\{1,2,5\}$

فـان الطرف الايمن =الطرف الايسر

لاثبات القانون الثاني

$B \cap C=\{2,5,6\} \longrightarrow A \cup (B \cap C)=\{1,2,3,4,5,6\}$

ويمثل الطرف الايسر

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$

ويمثل الطرف الايمن

$(A \cup B) \cap (A \cup C)=\{1,2,3,4,5,6\}$

فـان الطرف الايمن=الطرف الايسر

1-4-2 القوانين الذاتية Identity laws

اذا كانت B مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U فان:

أ. $A = \phi \cup A$ جـ. $\phi=\phi \cap A$

ب. $U=U \cup A$ د. $A=A \cap U$

مثال 1-17

اذا كانت $U=\{a,b,c,d,e,f\}$

$A=\{a,b,e\}$

فـان

أ. $A \cup \phi = \{a,b,e,\phi\} = \{a,b,e\} = A$

ب. $A \cup U = \{a,b,e\} \cup \{a,b,c,d,e,f\} = \{a,b,c,d,e,f\} = U$

جـ. $A \cap \phi = \{a,b,c\} \cap \{\phi\} = \phi$

د. $A \cap U = \{a,b,e\} \cap \{a,b,c,d,e,f\} = \{a,b,e\} = A$

1-4-3 قوانين المتمم Complement Laws

اذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة الكلية (الشاملة) U فان:

أ. $A \cap A^c = \phi$ جـ. $(A^c)^c = A$

ب. $A \cup A^c = U$ د. $U^c = \phi$

مثال 1-18

اذا كانـت $A=\{1,3,5,7\}$ $U=\{1,2, \ldots ,10\}$

فـان

أ. $A \cap A^c = \phi$ ⟵ $A^c = \{2,4,6,8,9,10\}$

ب. $A \cup A^c = \{1,2,3,4, \quad ,10\} = U$

جـ. $(A^c)^c=\{1,3,5,7\}$ ⟶ $A^c=\{2,4,6,8,9,10\}$

د. $U^c=\{\phi\}$ $U=\{1,2,\ldots,10\}$

1.4.4 قوانين دي موركان De Morgan's lows

اذا كانت B,A مجموعتين فان:

أ. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

ب. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

ويمكن اعتماد القانونين لاي عدد من المجموعات.

مثال 19-1

اذا كانت $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

$B=\{b,d,f,c\}$ $A=\{a,b,c\}$

فـان:

$A^c=\{d,e,f,g\}$, $B^c=\{a,g,e\}$

$A\cup B=\{a,b,c,d,f\} \Longrightarrow (A\cup B)^c=\{e,g\}$

$A^c\cap B^c=\{e,g\}$

وعليه فـان $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

وكـــذلك

$A \cap B=\{b,c\}$ $(A \cap B)^c=\{a,d,e,f,g\}$

$A^c \cup B^c=\{a,d,f,e,g\}$

وعليه فـان $(A \cap B)^c= A^c \cup B^c$

1-5 الازواج المرتبة والحاصل الديكارتي

The Order pairs and Cartesian product

ان كل عنصرين b,a مـاخوذين بالترتيـب a ثـم b وتـسمى a العنـصر الاول او المركبة الاولى او الحفظ الاول كما يسمى b بالعنصر الثاني او المركبة الثانيسة او الحفظ الثاني ويكتبان بالشكل (a,b) ويسمى بالزوج المرتب.

واذا كانت B,A مجموعتين فـان الحاصـل الـديكارتي للمجموعـة A فب المجموعة B هو مجموعة جميع الازواج المرتبة التي مسقطها الاول من المجموعة A ومسقطها الثاني من المجموعة B وتكتب A*B أي ان:

$A*B=\{(a,b):a \in A, b \in b\}$

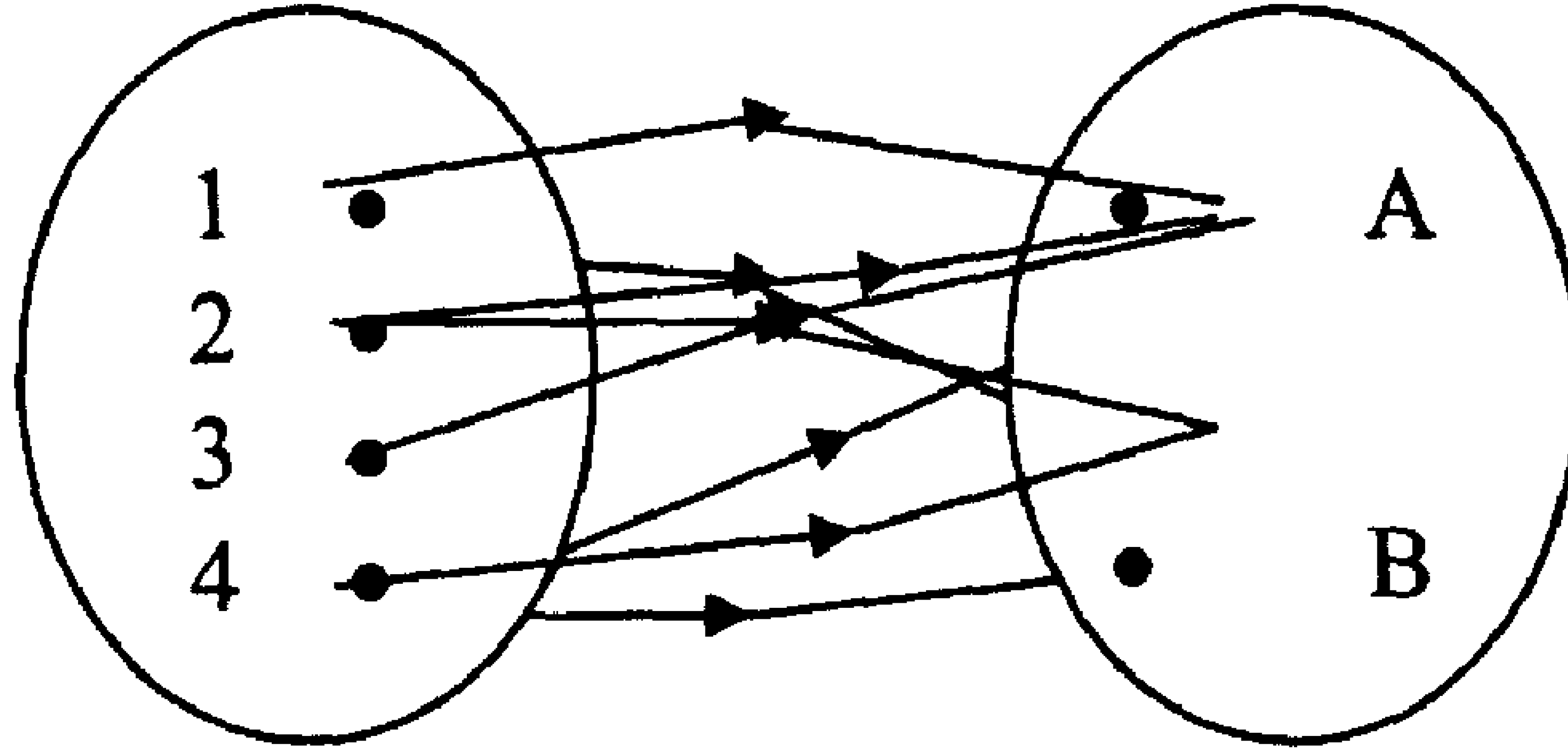
مثال1-20 اذا كانت

$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{a,b\}$

فــان

$A*B=\{(1,a)(2,a)(3,a)(4,a)(1,b)(2,b)(3,b)(4,b)\}$

ويمكن تمثيل ذلك بالمخطط الاتي:



1.6 رمز المجموع Summation

غالبا ما نحتاج الى عملية جمع سلسلة من الاعداد والكميات،فاذا كان العدد الاول X1 والثاني X2 والثالث X3 وهكذا الى n من الحدود فان المجموع الكلي لهذه الاعداد هو:

$X1+X2 \ldots.+Xn$

فاذا كانت n=10 فان المجموع سيكون

$X1+X2+\ldots.+X10$

وبهدف تسهيل عملية كتابة هذا المجموع بشكل اكثر اختصارا فيتم التعبير عنه بالشكل $\sum_{i=1}^{10} X_i$ حيث ان Σ رمز يشير الى عملية الجمع وهو حرف اغريقي يلفظ Sigma وان i يمثل الدليل لتسلسل العدد،فاذا كانت i=1 فذلك يعني العدد الاول واذا كانت i=4 فبعني العدد الرابع

وهكذا وان التعبير عن المجموع n من الاعداد هو $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

وبشكل عام يرمز للدليل باحد الاحرف الصغيرة، وفيما يلي بعض استخدامات هذا الرمز.

اذا كانت لدينا سلسلة الاعداد X1,X2 ...Xn فان:

1. مجموع مربعات قيم السلسلة تكتب $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

2. مربع مجموع قيم السلسلة $(\sum_{i=1}^{n} X)^2$

3. مجموع مقلوب قيم السلسة $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + ... + \frac{1}{X_n}$

4. مقلوب مجموع عناصر السلسلة $\frac{1}{\sum X_i} = \frac{1}{X_1 + X_2 + ... + X_n}$

5. مجموع جذر قيم السلسلة $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{X_i} = \sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + ... + \sqrt{X_n}$

اما خواص رمز المجموع فهي:

أ. مجموع الكمية الثابتة الى n من الحدود هو

$$\sum_{i=1}^{n} K = K + K + K + ... + K = nK$$

ب. مجموع حاصل ضرب الثابت بقيم السلسلة Xi يكون

$$\sum_{i=1}^{n} kX_i = k\sum_{i=1}^{n} X_i$$

جـ.مجموع حاصل اضافة او طرح الثابت k من قيم السلسلة Xi هـو

$$\sum(X_i \mp k) = \sum X_i \mp k$$

د. مجموع حاصل جمع او طرح قيم السلسلة Xi وعناصر السلسلة Yi هو

$$\sum_{i=1}^{n}(Xi \mp Yi) = \sum Xi \mp \sum Yi$$

هـ. يمكن تجزئة مجموع قيم السلسلة Xi الى جزئيين او اكثر أي

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{t} X_i + \sum_{i=t+1}^{n} X_i ,,,,, t < n$$

و. مجموع حاصل ضرب قيم السلسلتين Xi وYi هو

$$\sum_{i=1}^{n} Xi\,Yi = X1\,Y1 + \ldots + Xn\,Yn$$

مثال 1-21 اذا كانت

$Xi = 3,2,6,1,4$ $\quad$ $Yi = 1,6,3,2,2$

فـــان

$\sum Xi = X1 + X2 + X3 + X4 + X5 = 3+2+6+1+4 = 16$

$\sum Y_i^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + Y_5^2 = 1 + 6^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 = 1+36+9+4+4 = 54$

$\sum 3\,Xi = 3\sum Xi = 3(16) = 48$

$\sum (Xi-4) = \sum Xi - n(4) = \sum Xi - 5(4) = 16-20 = -4$

$(\sum Xi)^2 = (16)^2 = 256$

$\sum \frac{1}{X_i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \frac{54}{24}$

$\sum \sqrt{X_i} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{1} + \sqrt{4} =$

$\sum XiYi = 3(1)+2(6)+(6)(3)+1(2)+4(2) = 3+12+18+2+8 = 43$

$\sum (Xi - Yi) = \sum Xi - \sum Yi = 16-14 = 2$

$\sum (Xi-2)(Yi-3) = \sum Xi\,Yi - 3\sum Xi - 2Yi + \sum 6 = 43-3(16)-2(14)+30$

$= 73-48-28 = -3$

1.7 التباديل والتوافيق

Permutations & Combination

تعتبر طرق العد ومنها التوافيق والتباديل من المواضيع المهمة في دراسية الاحتمالات وخاصة في التطبيقات الاحصائية،فعندما نرغب بايجاد عدد الطرق التي يمكن لحادثة ان تحدث وعدد الطرق التي يمكن ترتيب عناصر مجموعة ما او عدد المجموعات المختلفة التي يمكن تكوينها من عدد معين من الاشياء لا بد من دراسة الطرق المختلفة لحساب تلك الاعداد.

1.7.1 التباديل

التبديل هو عدد التراتيب التي يمكن الحصول عليها من مجموعة

اشياء باخذها كلها او بعضها،فاذا كان لدينا n من الاشياء ونريد ان نرتب r منها(n≥r) فان عدد الطرق الممكنة للترتيب يمكن كتابتها كما يلي P_r^n ويمكن كتابتها رياضيا كما يلي:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \ldots \; 2\text{-}2$$

حيث ان !n (يقرأ مضروب n) وان n عدد صحيح موجب أي ان

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

فمثلا

$$1! = 1$$

$$2! = 2.1 = 2$$

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

ونتفق على ان $0! = 1$

ويمكن كتابة !n رياضيا كما يلي:

$$n! = n\Gamma n = \Gamma n + 1$$

حين Γ تمثل دالة كاما (gamma function) وان

$$\Gamma n = (n-1)!$$

مثال 22-1

ماهي الطرق الممكنة لتكوين كلمة من ثلاثة احرف من احرف كلمة AHMAD

$r=3\ ,\ n=5$

$$P_3^5=\frac{5!}{2!}=\frac{5.4.3.2!}{2!}=60$$ كلمة

مثال 23-1

بكم طريقة يمكن لمجموعة من ستة اشخاص ترتيب انفسهم:

1. بخط مستقيم 2. حول مائدة مستديرة

الحل:

1. ان عدد طرق ترتيب ستة اشخاص هي:

$$P_6^6=\frac{6!}{(6-6)!}=\frac{6!}{1!}=6!=720$$

2. لترتيب ستة اشخاص في شكل دائري،يثبت احدهم تم رتب البقية بالنسبة له وستكون عدد الطرق:

$$P_5^5=(n-1)!=5!=120$$

كما يمكن تعميم العلاقة (2-2) عند تجزئة عدد العناصر الكلية

n الى k من المجموعات الجزئية تحوي على n1 من العناصر المتشابهة وn2 من العناصر المتشابهة الاخرى،...،nk من العناصر المتشابهة الاخرى حيث ان:

$$n1+n2+\ldots+nk=n$$

فان عدد التباديل الممكنة من هذه العناصر هي:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!..n_k!}$$

مثال 1-24

ما هي عدد التباديل الممكنة التي يمكن تكوينها من احرف كلمة Statistic

<u>الحل:</u> بما ان الحرف t متكرر ثلاث مرات والحرف I,s مرتان فان:

$$\text{عددالتباديل} = \frac{9!}{2!3!2!1!1!} = \frac{9.8.7.6.5.4.3!}{3!2.12.1} = 15120$$

مثال 1-25

صندوق يحتوي على (20) بطاقة مرقمة 2،1،...،20 فاذا اردنا ان نرتب ثلاثة منها مما هي عدد الطرق الممكنة

طريقة $P_3^{20} = \frac{20!}{17!} = 20(19)(18) = 6840$

مثال 26-1

كم عدد يمكن تكوينه من الاعـداد 9،8،7،6،5،4،3 بحيـث يبـدأ بالرقم 3 ويتكون من اربعة مراتب

الحل: نستبعد العدد 3 لاننا سنضعه مع كل عدد تكونه وبذلك يتبقى تكوين عدد من ثلاثة مراتب فان عدد الاعداد المطلوب تكوينها هي:

$$P_3^6 = \frac{6!}{3!} = 120$$

مثال 27-1

للمثال السابق كم عدد زوجي مكون من اربعة مراتب:

الحـل: بما ان هناك ثلاثة ارقام زوجية هـي (8،6،4) والتـي وضـع احداها في اول أي عدد سيكون العدد زوجـي وعليـه فـان عـدد الطـرق لاختيار احداها هو (3) وبذلك استبعدنا احد الارقام وبقـي سـتة ارقـام نرتب منهم ثلاثة فسيكون عدد الاعداد المطلوب هو:

$$3.P_3^6 = 3(120) = 360$$

مثال 28-1

احمد يمتلك ثلاثة اشياء،ويمتلك عمر تسعة اشياء،جد عـدد الطـرق

التي يتمكنان بها من تبادل الاشياء فيما بينهما بشرط احتفاظ كل منهما بالعدد الاصلي للاشياء التي كانت معه.

الحل: بما ان احمد يمتلك ثلاثة اشياء ويرغب بتبادلها مع اشياء عمر فان على عمر ان يختار ثلاثة اشياء ليتبادلها مع احمد أي ان عدد الطرق هي:

$$P_3^9=\frac{9!}{6!}=9.8.7=504$$ طريقة

1.7.2 التوافيق Combination

هي عملية اختبار او سحب عدد من الاشياء من العدد الكلي للاشياء بدون ان ناخذ بنظر الاعتبار الترتيب،ويرمز للتوافيق الممكنة لاختيار r من الاشياء من n من الاشياء الكلية بـ C_r^n.

مثال 1-29

اذا كان اربع فرق في جامعات البصرة،بغداد،الموصل،المستنصرية واردنا اختيار فريقين منهما لمباراة كرة السلة فان عدد الطرق الممكنة هي:

(بصرة،بغداد) (بصرة،موصل) (بصرة،مستنصرية) (بغداد،موصل) (بغداد،مستنصرية) (الموصل،المستنصرية) ويلاحظ ان الترتيب غير مهم وتكون عدد التوافيق الممكنة هي 6:

مثال 30-1

لدينا خمسة اشخاص هم (E,D,C,B,A) ويراد تكوين لجنة من ثلاثة منهم فما هي عدد الطرق الممكنة للاختيار.

(A,B,C)(A,B,D)(A,B,E)(A,C,D)(A,C,E)

(A,D,E)(B,C,D)(B,C,E)(C,D,E)(B,D,E)

أي ان عدد الطرق الممكنة هي (10) توافيق

وان الصيغة الرياضية لايجاد عـدد التوافيـق الممكنـة لاختيـار r مـن الاشياء من n من الاشياء الكلية كما يلي:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_{n-r}^n$$

مثال 31-1

بكـم طريقـة يمكـن اختيـار اربعـة اشـخاص مـن (20) شـخص لاختيار وفد.

$$C_4^{20} = \frac{20!}{4!16!} = \frac{20.19.18.17}{4!} = 4845$$ طريقة

مثال32-1

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ثمانية اعضاء من بـين (30) رجـلا و(12) امراة بحيث تحتوي اللجنة

1. على ثلاثة رجال فقط. 2. على خمسة رجال على الاقل وامراتين على الاقل.

الحـل:

1. عدد الطرق لاختيار ثلاثة رجال من ثلاثين رجلا هي C_3^{30}.

عدد الطرق لاختيار خمس نساء من (12) هي C_5^{12}.

فان عدد الطرق لاختيار اللجنة هي:

$$C_3^{30}.C_5^{12} = \frac{30!}{3!27!}.\frac{12!}{5!7!} = (4060)(792) = 3215520$$

2. اللجنة يجب ان تكون من خمسة رجال وثلاث نساء او ستة رجال وامراتين.

الحالة الاولى:

عدد الطرق $= C_5^{30}.C_3^{12} = (142506)(220) = 31351320$

الحالة الثانية:

عدد الطرق $= C_6^{30}.C_2^{12} = (593775)(66) = 39189150$

عدد الطرق الكلية $= 31351320 + 39189150 = 70540470$

1.8 نظرية ذي الحدين

عندما يراد ايجاد مفكوك المقدار (x+y) للقوى 4,3,2 فيمكن ايجادها بضرب المقار في نفسه عدد من المراد ونحصل على:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = (x+y)^2(x+y)^2 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

وعند ملاحظة الحدود السابقة يمكن استنتاج الاتي:

أ. مجموع قوى y,x في كل حد من حدود المفكوك يساوي قوة المقدار ففي مفكوك $(X+Y)^4$ نجد ان الاسس المرفوعة x اليها هي (4،3،2،1،0) والاسس المرفوعة Y اليها هي (4،3،2،1،0).

ب. عدد الحدود في المفكوك $(X+Y)^n$ هو n+1

جـ. معامل كل حد مرتبته r في مفكوك $(X+Y)^n$ هو C^n_{r-1} فمثلا معامل الحد الرابع في مفكوك $(X+Y)^4$ يساوي $(C^4_3 = 4)$

وعليه نستنتج حدود المفكوك $(X+Y)^n$ كما يلي:

$$(x+y)^n = C^n_0 X^n + C^n_1 X^{n-1} y + C^n_2 X^{n-2} y^2 + \ldots + C^n_n y^n$$

الذي يطلق عليه نظرية ذي الحدين مع العلم ان $C^n_0 = 1$ وان $C^n_n = 1$.

مثال 33-1

اوجد مفكوك المقدار $(A+2B)^4$

$$(A+2B)^4 = C_0^4 + C_1^4A^3(2B) + C_2^4A^2(2B)^2 + C_3^4A(2B) + C_4^4(2B)^4 A^4 + 8A^3B + 24A^2B^2 + 32AB^3 + 16B^4$$

مثال 34-1

اوجد مفكوك المقدار الاتي $(X+Y)^7$

$$(X+Y)^7 = C_0^7X^7 + C_1^7X^6Y + C_2^7X^5Y^2 + C_3^7X^4Y^3 + C_4^7X^3Y^4 + C_5^7X^2Y^5 + C_6^7XY^6 + C_7^7Y^7$$

وحيث ان الحد الثاني والرابع يمكن كتابتها كما يلي:

$L_2 = C_1^7X^6Y$ $\quad$ $L_4 = C_3^7X^4Y^3$

أي ان الحد من الرتبة r في المفكوك $(X+Y)^N$ هو:

$$L_r = C_{r-1}^N X^{N-r+1} Y^{r-1}$$

مثال 35-1

جد الحد السابع في المفكوك $(A+B)^{10}$

$$L_7 = C_6^{10} A^{10-7+1} B^{7-1} = C_6^{10} A^4 B^6$$

مثال 1-36

اوجد قيمة $(0.8)^5$ بحيث يكون الناتج صحيحا لاقرب ثلاث مراتب عشرية

0.8=1-0.2

$$(0.8)^5 = (1-0.2)^5 = 1^5 + 5(1)^4(-0.2) + 10(1)^3(-0.2)^2$$
$$+10(1)^2(-0.2)^3 + 5(1)(-0.2)^4 + (-0.2)^5$$

=1-1+10(0.04)-10(0.008)+5(0.0016)+0.00

=0.328

مثال 1-37

جد معامل X في مفكوك $(x+\frac{1}{x})^5$ حيث ان X ≠ 0 نفرض ان X يظهر في الحد الذي رتبته r أي ان

$$L_r = C^5_{r-1} X^{5-r+1} (\frac{1}{X})^{r-1}$$

حيث ان B هو معامل X في الحد من الدرجة r $= B * X^{7-2r}$

وبما ان $X^{7-2r} = X$

أي الحد الذي يحوي على X هو 7-2r =1 ⟹ r=3

أي ان $L_3 = C^5_2 X^3 (\frac{1}{X})^2 = 10X$

مثال 38-1

جد الحد الخالي من X في مفكوك $(x^2+\frac{1}{2x^3})^{15}$ حيث ان $X \neq 0$

نفرض ان الحد الخالي من X هو L_r أي ان:

$$L_r = C_{r-1}^{15}(X^2)^{15-r+1}(\frac{1}{2X^3})^{r-1}$$

$$= C_{r-1}^{15} X^{35-5r} \frac{1}{2^{r-1}}$$

بما ان هذا الحد خال من X فان

35-5r = 0 ⟹ r =7

أي ان

$$L_7 = C_6^{15} \frac{1}{26} = \frac{5005}{64}$$

تمارين الفصل الاول

1. اذا كانت $U=\{1,2,\ldots,10\}$, $A=\{1,2,3\}$

$B=\{1,2,3,7,5\}$ $C=\{2,4,5,6\}$

احسب

a) $A\backslash C$, b) $A\cup C\backslash A$, c) $B\cap C$, d) $A\cap B$, e) $A\cup B$

2. اذا كان $C=\{c,f,g,h,k\}$ $B=\{a,c,e,f\}$ $A=\{a,b,c,d\}$

احسب $a) A\setminus C, b) (A\cap B)\cup B, c) A\cup(B\cap C), d) (A\cup B)\cap C$

3. أي من المجموعات التالية متساوية:

$B=\{6,2,3,4\}$ $A=\{1,3,75\}$

$D=\{5,1,3,7\}$ C={X:9 عدد فردي اقل من X}

4. اذا كانت $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,5\}$, $C=\{1,3,5,7\}$

اوجد $a) AxA, b) Ax(B\setminus C), c) (AxB)\cap(BxA), d) (A\setminus B)x(A\setminus C)$

5. اذا كانت $C=\{2,5,7\}$ $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A=\{1,2,3,4\}$

$E=\{4,5,6,7\}$ $D=\{1,3,4\}$

اوجد $a) A\cup B, b) A\cap B,, c) C\cup D,, d) C\cap(D\cup E),, e) A\cap(C\cup D),, f) A\cup B\cup C\cup D$

6. اذا كانت

a) A={1,2,3,4} , B={3,4,2,1}

b) A={1,2,3,2} , B={1,3,2,1,3}

c) A={X:X∈P عدد زوجي X}, B={Y:Y∈N,2Y+4=2}

d) A={X:X∈N, 5 اقل من X}, B={X:X∈N,28 اقل من $(X+1)^2$ }

قارن بين المجموعتين (A,B) وتحقق هل هما متساويتان هم لا.

7. جد ناتج كل مما يلي:

a) $\sum_{i=1}^{20} i$ b) $\sum_{i=4}^{8} i^2$ c) $\sum_{k=6}^{10}(1-\frac{1}{k})$

d) $\sum_{h=1}^{6}(h+3)^2$ e) $\sum_{j=1}^{8}\sqrt{j+2}$ f) $\sum_{h=1}^{5} 3^{h+1}$

8. اذا كان $X_i = 1,2,3,4,3$,,,,, $Y_i = 2,1,3,3,5$ احسب

a) $\sum(x-y)$ b) $\sum\sqrt{x+y}$ c) $\sum x^y$

d) $\sum\frac{x}{y}$ e) $\sum(x-y)^2$

9. جد ناتج ما يلي:

a) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}(2i+j)$ b) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} 2^{i+j}$

c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{5}(2i+3j-k)$

10. اذا كانت $Xi=2,3,6,4,8$, $Yi=3,1,2,1,6$, اوجد:

a) $\sum y^4$ b) $\sum x^2 y^3$ c) $\sum (x_i - y_i)^{-1}$

d) $\sum y(x+1)^2$ e) $\sum 2(x+y)^{-2}$

11. كم عدد من اربعة ارقام يمكن تكوينه من الاعداد 6,5,4,3,2 ؟

12. كم عدد ثلاثيا يمكـن تكوينـه مـن الارقـام 9,8,7,6,5,4,3,2,1 بدون تكرار أي عدد ؟

13. كم ترتيب يمكن تكوينه من اربعـة انـواع مـن الاشـجار كـل منهـا مكون من شجرتين ؟

14. اوجد P_1^{10} و P_2^5

15. بين صحة العلاقات الاتية:

a) $C^n_{n-r} = C^n_r$ b) $C^n_r + C^n_{r-1} = C^{n+1}_r$

c) $C^r_k = \frac{r}{k} C^{r-1}_{k-1}$ d) $C^{r-1}_k = (r-k)C^r_k$

16. جد قيمة N اذا كان: $C^n_{15} = C^n_{11}$, $C^n_{n-2} = 10$

17. ما هي عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من حروف كلمـة (عربية)

أ. باخذها كل مرة. ب. باخذ ثلاثة منها في كل مرة.

18. في احدى الحفلات حظر 15 رجلا، 20 سيدة، يراد جلوس سبعة منهم على منضدة يوجد على يمينها اربعة كراسي وعلى يسارها ثلاثة كراسي:

أ. فبكم طريقة يمكنهم الجلوس اذا كان جلوس السيدات فقط على اليمين والرجال فقط على اليسار.

ب. بكم طريقة يمكنهم الجلوس اذا جلست سيدة معينة في اول كرسي على اليمين وان يجلس رجل معين في اول كرسي على اليسار.

19. كاظم يمتلك ثلاثة اشياء ورياض يمتلك تسعة اشياء،جد عدد الطرق التي يتمكنان بها من تبادل الاشياء فيما بينهما بشرط احتفاظ كل منهما بالعدد الاصلي للاشياء التي كانت معه.

20 جد عدد الطرق التي يمكن بها احتيار سبع كرات بينهما ثلاث كرات حمراء من حقيبة تحتوي على ست كرات حمراء وخمس كرات بيضاء.

21. جد معامل X^3Y^4 في مفكوك كل مما يلي:

a)$(X+2y)^7$　　b)$(X^3+y^2)^3$

22. اوجد مفكوك المقادير $(x+y)^5$, $(x-y)^6$ وبين صحة هذه العلاقات عندما X=2,Y=-1.

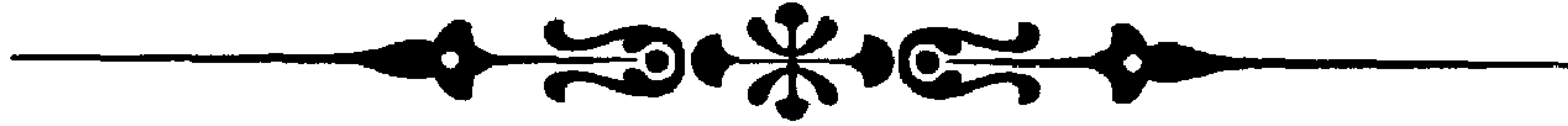
23. جد كل من المقادير الاتية:

a) $(2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4$ b) $(1+\frac{1}{n})^5-(1-\frac{1}{n})^5, n \neq 1$

c) $(1.02)^4-(0.98)^4$

24. اكتب الحد الخامس عشر في مفكوك $(A+B)^{32}$ بالصورة العامة.

اذا كان معاملا الحدين السادس والسادس عشر في مفكوك $(x+y)^n$ متساويين جد قيمة n.






الفصل الثاني
المتجهات والمصفوفات والمحددات

2-1 المتجه (Vector)

2-2 المصفوفات (Matrices)

2-3 المحددات (Determinants)

2-4 تطبيقات المصفوفات والمحددات



المتجهات والمصفوفات والمحددات

2-1 المتجه [Vector]

هي مجموعة من المقادير الكمية تمثل مركبات ويمثل كل منها شيئاً يختلف عن الأخر.

فمثلاً الأعداد (2,3,7,1,9) تمثل موجها ذا خمسة أبعاد وتدعى تلك الأعداد بمركبات المتجه.

مثال 1-2

لو كان لدينا صندوق على شكل متوازي مستطيلات طوله 3 متر وعرضه 2 متر وأرتفاعه 3 متر فيمكن أن نعبر عن الأبعاد الثلاثة بالمتجه [3 2 3] .

يرمز للمتجه بحرف كبير (A, B, ...) ولكل من مركباته بحرف صغير مع رقم يطلق عليه (دليل) الذي يعين ترتيبه في المتجه مثل

$$y = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]$$

هو متجه ذو البعد n .

2-1-1 أنواع المتجهات

2-1-1-1 ألمتجه العمودي (Column Vector)

هو مجموعة من أعـداد حقيقيـة مرتبـة في عمـود واحـد، فالمتجـه A العمودي التالي من المرتبة n يكتب بالشكل

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

2-1-1-2 المتجه الصفي (Row Vector)

هو مجموعة من أعـداد حقيقيـة مرتبـة في وصـف واحـد فالمتجـه B الصفي التالي من الرتبة n يكتب بالشكل

$$B = [b_1 \quad b_2 \qquad b_n].$$

2-1-1-3 المتجه الصفري (Zero Vector)

هو المتجه الصفي أو العمودي الذي كل مركبة من مركباتـه تـساوي صفر ويرمز له بـ 0 .

لا يوجد هناك فروق جوهريـة بـين المتجهـات الـصفية أو العموديـة

سوى طريقة التعبير، إذ أن جميع العمليات الجبرية التي تنطبق على المتجهات الصفية، تطبق على المتجهات العمودية أيضاً.

تعريف: - المتجهات المتساوية

ليكن $X = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$ و $Y = (y_1\ y_2\ \dots\ y_n)$ متجهين من نفس الرتبة n فأن $X = Y$ إذا وفقط أذا كانت:

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2 \dots , x_n = y_n$$

مثال: 2-2

إذا كان $C= [2, -3]$, $B= [2\ 1/2 , -3]$, $A = [10/4, -3]$ فإن $B = A$

مثال: 2-3

جد قيمة X , Y إذا كان $[2x\ \ 6\ \ 9] = [\ 8\ \ 6\ \ 3y]$

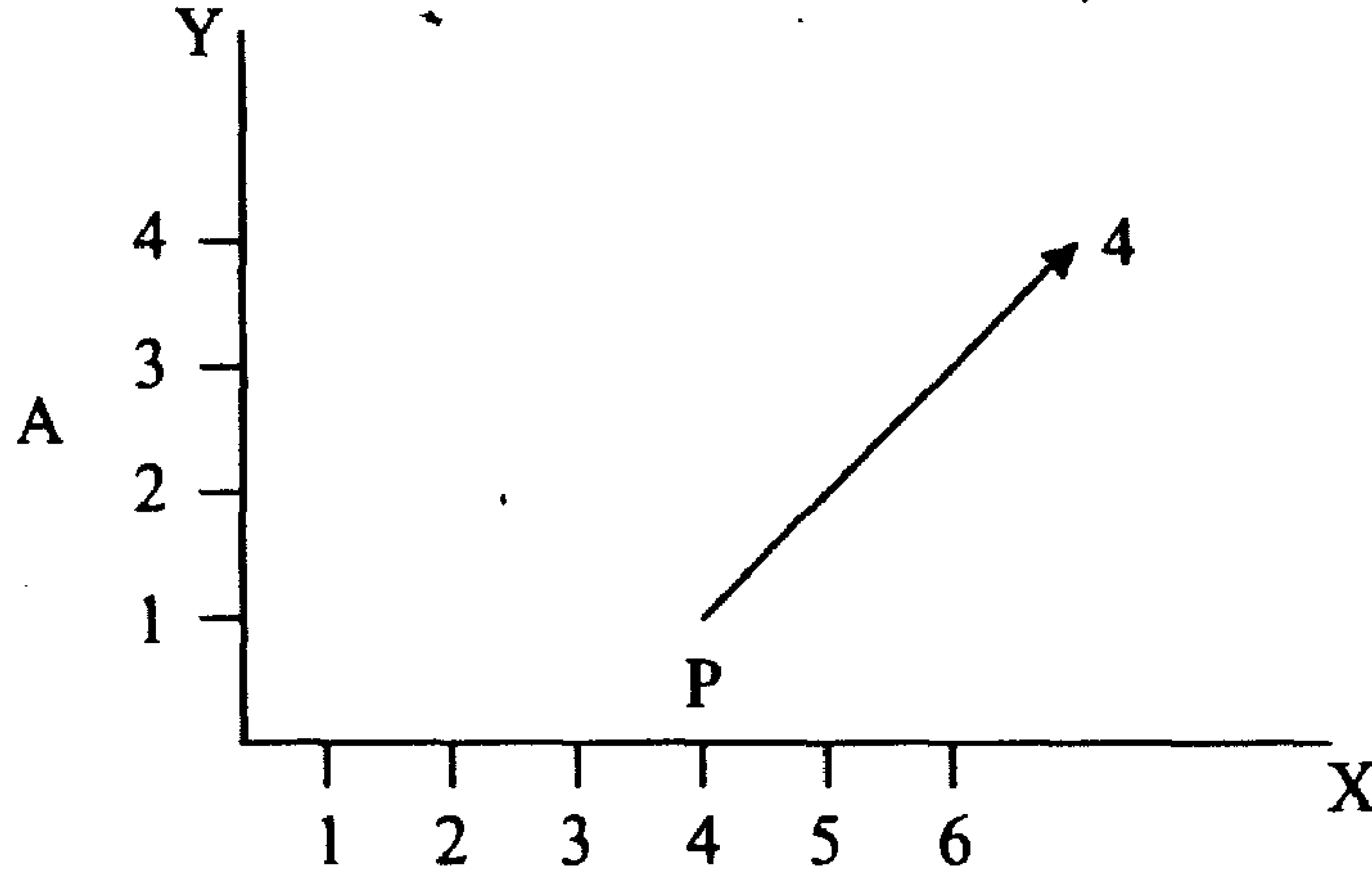
$$2x = 8 \Longrightarrow x = 4$$
$$9 = 3y \Longrightarrow y = 3$$

2-1-2 تمثيل المتجهات:

يتم تمثيل المتجه من خلال نقطة البداية ونقطة النهاية ورسم خط مستقيم بين النقطتين، ويعتمد ذلك على مركبات المتجه.

مثال 4-2 :

أرسم المتجه الأتي $A = (X, Y)$ إذا كانت نقطة بداية $P (4,1)$ ونقطة نهايته $Q (6, 4)$



2-1-3 **جمع المتجهات** Addition of Vectors

إذا كان $A = [a_1\ a_2\ \dots\ a_n],\ B = [b_1\ b_2\ \dots\ b_n]$

متجهين من نفس الرتبة n فيعرف التجميع $A + B$ بأنه المتجه

$$A + B = [a_1 + b_1\ \ a_2 + b_2\ \ \dots\ \ a_n + b_n]$$

أي جمع المركبات المتناظرة لكلا المتجهين.

مثال 5-2

أوجد مجموع المتجهين $A = (2\ \ 6\ \ -1\ \ 0),\ B = (6\ \ 1\ \ 4\ \ 2)$

$$A + B = [2 + 6\ \ \ 6 + 1\ \ \ -1 + 4\ \ \ 0 + 2] = [8\ \ 7\ \ 3\ \ 2]$$

لأي متجهين من نفس الرتبة A , B ، تكون العلاقات الآتية صحيحة

1. $A + B = B + A$
2. $A + 0 = 0 + A = A$
3. $k (A+B) = kA + kB$ k مقدار ثابت كمي
4. $1.A = A$

وإذا رمزنا ل (-A) بالمتجه (A) (-1) فإن

$$A + (-A) = 0$$

وبدلاً من كتابة $A + (-B)$ سوف نكتب $A - B$

مثال 6-2

أجمع كل من المتجهات $A = (2 \;\; 3)$ و$B = (-1 \;\; 1)$ ، وكذلك $C = (3 \;\; 1)$ و $D=(1 \;\; 2)$

$$A + B = (2 \;\; 3) + (-1 \;\; 1) = (1 \;\; 4)$$
$$C + D = (3 \;\; 1) + (1 \;\; 2) = (4 \;\; 3)$$

2-1-4 ضرب المتجهات Product of two vectors:

هناك نوعان لضرب المتجهات.

2-1-4-1 الضرب الكمي Dot product :

ليكن $A = (a_1 \ldots a_2)$ ، $B = (b_1 \ldots b_2)$ متجهين أفقيين فأن الضرب الكمي للمتجهين بالشكل A.B تمثل مقداراً كمياً (عدد حقيقي) ويكتب كما يأتي:

$$A.B = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

ويجب أن يكون المتجهان من نفس الرتبة في الأبعاد.

للضرب الكمي خواص يمكن كتابتها بالشكل الأتي:

1. قانون التبادل أي أن

$$A.B = B.A$$

2. إذا كانت C, B, A, ثلاث متجهات فإن:

$$A.(B + C) = A.B + A.C = (B + C)\,A$$

3. إذا كانت X عدد حقيقي فإن

$$(XA).B = X(A.B) = A.XB$$

4. إذا كان $A = 0$ موجه صفري فإن

$$A.A = 0$$



5. ليكن h, k عددين حقيقيين وإن B, A متجهين من نفس الرتبة فإن:

a) $k(A + B) = kA + kB$

b) $(k + h) A = kA + hA$

مثال 7-2

إذا كان $V_1 = [-4 \;\; 11 \;\; 0]$، $V_2 = [5 \;\; 2 \;\; -1]$، $V_3 = [7 \; -18 \; 3]$

وإن $k_1 = 4$، $k_2=3$، $k_3 = 7$ أوجد

أ. التركيب الخطي التالي

$$k_1V_1 + k_2V_2 + k_3V_3$$

ب. $k_2 (V_1 + V_2)$

ج. $(k_1 + k_2) V_3$

د. $V_1.V_2$

هـ. $k_1 (V_1.V_3)$

الحل:

$$\begin{aligned} V &= 4(-4 \;\; 11 \;\; 0) + 3(5 \;\; 2 \;\; -1) + 7(7 \;\; -18 \;\; 3) \\ &= (-16 \;\; 44 \;\; 0) + (15 \;\; 6 \;\; -3) + (49 \;\; -125 \;\; 21) \\ &= (48 \;\; -95 \; 18) \end{aligned}$$



ب. $k_2 (V_1 + V_2) = 3[(-4 \;\; 11 \;\; 0) + (5 \;\; 2 \;\; -1)]$

$= 3[1 \;\; 13 \; -1] = [3 \;\; 39 \;\; -3]$

$(k_1 + k_2) V_3 = (3 + 7) (7 \;\; -18 \;\; 3)$

$= 10 (7 \;\; -18 \;\; 3) = (70 \;\; -180 \;\; 30)$

د. $V_1.V_2 = (-4 \;\; 11 \;\; 0).(5 \;\; 2 \;\; -1)$

$= (-20 + 22 + 0) = 2$

هـ. $K_1 (V_1.V_3) = 4 (-4 \;\; 11 \;\; 0).(5 \;\; 2 \;\; -1)$

$= (-16 \;\; 44 \;\; 0).(5 \;\; 2 \;\; -1)$

$= (-80 \;\; 88 \;\; 0)$

تعريف: إذا كان هناك تركيب خطي للمتجهات $V_1, V_2, \dots , V_m$ بالمعاملات $k_1 \dots, k_m$ مساوية للمتجه الصفري ولم تكن كل المعاملات أصفار فعندئذ يقال للمتجهات $V_1, \dots, V_m$ إنها معتمدة خطياً (Linearly dependent) وإلا فهي مستقلة خطياً (Linearly independent) بمعنى أخر أن المتجهات $V_1, \dots, V_m$ مستقلة خطياً إذا وفقط إذا

أستوفت الشروط

$$k_1V_1 + k_2V_2 + \dots + k_mV_m = 0$$

$$\Longrightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$$

مثال 2-8

اذا كانت $v_1 = (110, 90)$ ، $v_2 = (4,1)$ ، $v_3 = (2,3)$ واذا اخذنا

المعاملات $k_1 = -1$ ، $k_2 = 15$ ، $k3 = 25$.

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = -1(110 \;\; 90) + 15(4 \;\; 1) + 25(2 \;\; 3)$$

$$= (-110 \;\; -90) + (60 \;\; 15) + (50 \;\; 75) = (0 \;\; 0)$$

وعليه فأن المتجهات v_3, v_2, v_3 معتمدة خطياً

مثال 2-9

بين ان المتجهات التالية مستقلة خطيا

$$v_1 = [1 \;\; 0 \;\; 2] \qquad v_2 = [0 \;\; -1 \;\; 3] \qquad v_3 = [-2 \;\; 0 \;\; 1]$$

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

$$k_1(1 \;\; 0 \;\; 2) + k_2(0 \;\; -1 \;\; 3) + k_3(-2 \;\; 0 \;\; 1) = 0$$

$$(k_1 \;\; 0 \;\; 2k_1) + (0 \;\; -k_2 \;\; 3k_2) + (-2k_3 \;\; 0 \;\; 1k_3) = 0$$

$$k_1 - 2k_3 = 0 \qquad \text{-----} \; (1)$$

$$-k_2 = 0 \qquad \text{-----} \; (2)$$

$$2k_1 + 3k_2 + k_3 = 0 \qquad \text{-----} \; (3)$$

يتضح من معادلة (2) ان k2=0 وبالتعويض في المعـادلتين (1) و(3)

ينتج

$k_1 - 2k_3 = 0$ ----- (1)

$2k_1 + k_3 = 0$ ----- (3)

بضرب معادلة (3) بـ(2) ينتج:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 - 2k_3 = 0 \\ 4k_1 + 2k_3 = 0 \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$

$$5k_1 = 0 \Longrightarrow k_1 = 0 \Longrightarrow k_3 = 0$$

أي ان $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

فان المتجهات الثلاث v_3, v_2, v_1 مستقلة خطيا.

تعريف: ليكن (A) متجـه مـن الرتبـة (n) ، فتعـرف القيمـة $\|A\|$ أو طول (A) والتي يرمز لها كما يأتي:

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

مثال 2-10

اذا كان

$$\|A\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{25} = 5$$



تعريف: يقال للمتجه u متجه الوحدة او الواحدي (Unit Vector)

اذا كان $\|u\|=1$

مثال 2-11

اذا كان $u=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}$ فان

$$\|u\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{36}}=\sqrt{\frac{36}{36}}=1$$

وعليه فان u متجه الوحدة .

2-1-4-2 الضرب الاتجاهي (Cross Products):

اذا كان $A=(a_1, a_2, a_3)$ وان $B=(b_1, b_2, b_3)$ فان الضرب الاتجاهي للمتجهين B,A هو متجه يكتب بالشكل الآتي:

$$A\times B=(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ a_3b_1-a_1b_3\ ,\ a_1b_2-a_2b_1) \text{ ----- } (5\text{-}1)$$

ويلاحظ ان الضرب الاتجاهي يعرف فقط عندما يكون المتجهين من الرتبة (3)

وإذا تم التعبير عن المتجهين B, A بالشكل الآتي:

$$A = a_1X + a_2Y + a_3Z$$
$$B = b_1X + b_2Y + b_3K$$

فان الضرب الاتجاهي يمكن التعبير عنه بالشكل الآتي:

$$A \times B = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)X + (a_3b_1 - a_1b_3)Y + (a_1b_2 - a_2b_1)Z$$

والذي يمثل ناتج محدد ثلاثي ، والذي سيتم توضيح طريقة ايجاده في موضوع المحددات ضمن هذا الفصل.

مثال 2-12

اوجد ناتج الضرب الاتجاهي للمتجهين (1- 2 1)=A(2 2 2-)=B

$a_1=1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3 \quad b_1 =- 2 \quad b_2 = 2 \quad b_3 = 2$

ويتطبيق المعادلة (1-5) السابقة نحصل على

$$A \times B = [2(2) - (-1)(2), (-1)(-2) - (1)(2), (1)(2) - (2)(-2)]$$
$$= [4 + 2 , 2 - 2 , 2 + 2]$$
$$= [6 \quad 0 \quad 6]$$

مثال 2-13

اوجد B×A اذا كان (1- 0 2)=B و (2 1- 1)=A

$$A \times B = [(-1)(-1) - (2)(1)\,,\ (2)(2) - (1)(-1)\,,\ (1)(0) - (-1)(2)]$$
$$= [3 \quad 5 \quad 2]$$

2-2 المصفوفات [Matrices]:

استعملت المصفوفات لأول مرة في حل مجموعة المعادلات الخطية ثم توسع استعمالها كثيرا في مجالات التخطيط للعمليات الصناعية في الانتاج والتسويق كما انها اصبحت مهمة في مواضيع الميكانيك والفيزياء والهندسة والحاسبات الالكترونية وبحوث العمليات وغيرها من العلوم.

هناك حالات كثيرة يكون فيها من الطبيعي تقديم المعلومات بشكل جداول ومن امثلة ذلك الجدول التالي:

	قسم أنظمة الحاسبات	قسم الحاسبة	قسم الإحصاء
طلاب	40	50	15
طالبات	22	60	20

اذ ان هذا الجدول يمثل عدد الطلاب والطالبات في الصف الثاني موزعين حسب ثلاثة أقسام، ومن الممكن ان نرتب هذا الجدول بالشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} 15 & 50 & 40 \\ 20 & 60 & 22 \end{bmatrix}$$

والذي يسمى بالمصفوفة (Matrix).

أي اننا يمكن ان نعرف المصفوفة كما ياتي:

المصفوفة: هي مجموعة اعداد او كميات حقيقية مرتبة في صفوف واعمدة وتكون محصورة بين قوسين.

للمصفوفة سعة (size) يمثل عدد الصفوف x عدد الاعمدة. فالمصفوفة السابقة ذات سعة (3×2) أي مكونةمن صفين وثلاثة اعمدة.

ويمكن ان نرمز للمصفوفة بحرف كبير ، فالمصفوفة العامة ذات السعة (n×m) تكتب بالصورة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{an} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

لقد رمزنا لكل عنصر بحرف صغير (a) مع رقمين الى الاسفل منه يعرفان بالدليلين الاول منهما يدل على رقم الصف الذي يقع فيه العنصر والثاني يدل على رقم العمود الذي يقع فيه. فمثلا (a_{35}) العنصر الذي يقع في الصف الثالث والعمود الثاني . وعادة يرمز للعنصر العام بـ (a_{ij}) الذي يقع في الصف(i) والعمود(j) .



يمكن كتابة المصفوفة العامة(A) بالصورة المختصرة التالية

$$A = [a_{ij}],\ m\times n \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

فالمصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 17 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

ذات السعة (3×5) لانها تتكون من ثلاثة صفوف وخمسة اعمدة ، وان العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الرابع هو (3-)

تعريف: يطلق على المصفوفتين $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ متساويتين $A = B$ (equal matrices) اذا وفقط اذا كانا من نفس الرتبة وان كل عنصر من الاولى يساوي العنصر المناظر له في الثانية أي

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

مثال 2-14

اذا كان $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & \sqrt{9} \\ \sqrt{36} & 5 & 3 \end{pmatrix}$

فان $A \neq B$ لانها ليسا من نفس الرتبة ولكن $B=C$

مثال 15-2

أوجد قيم كل من Z, Y, X اذا كان

$$\begin{pmatrix} 2 & X \\ 2 & 2Y+1 \\ -5Z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$X = 5,\ \ 2Y + 1 = -7 \Rightarrow 2Y = -8 \ \Rightarrow Y = -4,\ -5Z = 10 \ \Rightarrow\ Z = -2$

2-2-1 انواع المصفوفات:

هناك أنواع عديدة من المصفوفات سنذكر اغلبها :

1. المصفوفة العمودية (Column Matrix):

هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط فمثلا

مصفوفة عمودية ذات سعة (4×1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. المصفوفة المربعة (Square Matrix)

اذا كانت عدد الصفوف في المصفوفة مساوية لعدد الاعمدة أي $(m = n)$

تسمى بالمصفوفة المربعة ذات السعة (n) مثل المصفوفة (A) التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -7 \\ 8 & -11 & 5 \\ -13 & 32 & 10 \end{pmatrix}$$

وان العناصر ($a_{nn},\ldots, a_{22}, a_{11}$) في المصفوفة المربعة تسمى بعناصر القطر الرئيسي، وان مجموع عناصر القطر الرئيسي يسمى اثر (Trace) المصفوفة (A).

أي ان :

$$Trace\ (A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

للمصفوفة السابقة فان

$$Trace\ (A) = 9 - 11 + 10 = 8$$

1. المصفوفة الصفية (Row matrix)

هي المصفوفة المكونة من صف واحد فقط مثل:

هي مصفوفة ذات سعة (1×4).

$$B = [\,2 \quad 6 \quad -1 \quad 4\,]$$

2. المصفوفة الصفرية (Zero Matrix)

هي المصفوفة التي كل عنصر من عناصرها هو الصفر ويرمز لها ب(0).

3. المصفوفة المتماثلة (Symmetric Matrix)

هي مصفوفة مربعة يكون فيها عناصر الثلث العلوي مساوية لعناصر الثلث السفلي، أي ان $a_{ij} = a_{ij}$ لجميع قيم i, j . وعند تبديل عناصر الصفوف بعناصر الأعمدة لا تتغير المصفوفة .

مثال 2-16

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة متماثلة لأن $a_{12} = a_{21} = 2$ ،

$a_{13} = a_{31} = 3$ وإن $a_{23} = a_{32} = -5$

تعريف: منقول المصفوفة (Transpose of Matrix)

اذا كانت (A) مصفوفة ذات سعة (n×m) ، فان المصفوفة الناتجة من تبديل عناصر الصفوف بالاعمدة تسمى بمنقول المصفوفة ويرمز لها بـ (A^T) بسعة (m×n) .

مثال 2-17

اوجد مبدلة المصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. مصفوفة الوحدة (الواحدية) (Identity Matrix)

هي المصفوفة المربعة التي عناصر القطر الرئيسي فيها يساوي واحد وبقية العناصر كلها اصفار ويرمز لها ب(I_n) مثل :

هي مصفوفة واحدية سعتها (3×3)

$$I3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix)

هي مصفوفة مربعة فيها عناصر القطر الرئيسي تمثل اعداد وباقي العناصر في المصفوفة تمثل الصفر تسمى بالمصفوفة القطرية ويرمز لها عادة بـ (D) فمثلا المصفوفة (D) التالية هي مصفوفة قطرية ذات سعة (4×4).

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$



ويمكن ان تكتب كما يلي

$$D = diag\,(2 \quad 3 \quad -1 \quad 6)$$

2-2-2 **جمع المصفوفات** (Sums of Matrices)

اذا كانت $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$ مصفوفتان ذات سعة $(n\times m)$ فان حاصل جمعها (طرحها) $B \mp A$ ، يعرف بانه المصفوفة $C = (c_{ij})$ ذات سعة $(n\times m)$ حيث ان كل عنصر فيها يمثل جمع (طرح) العناصر المناظرة لكل من A, B أي أن

$$A \mp B = [a_{ij} \mp b_{ij}]$$

مثال **2-18**

اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

اذن

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

2-2-3 قوانين الجمع للمصفوفات،

اذا كانت A, B, C مصفوفتان ذات سعة (n×m) فان العلاقات التالية صحيحة

1) $A + B = B + A$

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) $k(A + B) = kA + kB = (A + B)k$ k كمية ثابتة

4) $A + 0 = 0 + A = A$

5) $A + (-A) = -A + A = 0$

مثال 19-2

اذا كان $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ أحسب

1) 2A , 2) 4(A + B) , 3) 5(A - B) , 4) A – 2B

$$1)\ 2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2)\ 4(A + B) = 4\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\right] = 4\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 24 & 16 \end{pmatrix}$$

$$3)\ 5(A - B) = 5\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\right] = 5\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix}$$

$$4)\ A - 2B = 4\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$



2-2-4 ضرب المصفوفات (Multiplication of Matrices)

يقال للمصفوفتين B,A انهما متوافقتان للـضرب بالترتيـب A,B اذا كان عدد اعمدة A يساوي عدد صـفوف B ، ويعـرف حاصـل الـضرب (AB) بانه المصفوفة $C = (C_{ij})$ عدد صفوفها يـساوي عـدد صـفوف A وعدد اعمدتها يساوي عدد اعمدة B ، وان العنصر (C_{ij}) يساوي العنصر مـن حاصـل ضرب الـصف (i) للمـصفوفة A (كمـصفوفة صـفية) في العمود (j) للمصفوفة B (كمصفوفة عمودية) وعندئذ تكتب

$$C = A \cdot B$$

فاذا كانت سعة A هي $(n\times m)$وسعة B هي $(p\times n)$ فان سعة (C) هي $(p\times m)$ وان (A, B) غير متوافقين للضرب بالترتيب (BA).

مثال 2-20

اذا كان

$$B=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 11 & 5\\ 9 & 8\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ 8 & 9 & 2\end{pmatrix}$$

اوجد

1) AB

2) BA

$$1)\ A.B=\begin{pmatrix}5&6&3\\8&9&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&4\\11&5\\9&8\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}5(7)+6(11)+3(9)&5(4)+6(5)+3(8)\\8(7)+9(11)+2(9)&8(4)+9(5)+2(8)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}35+66+27&20+30+24\\56+99+18&32+45+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}128&74\\173&93\end{bmatrix}$$

$$2)\ B.A=\begin{pmatrix}7&4\\11&5\\9&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6&3\\8&9&2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}7(5)+4(8)&7(6)+4(9)&7(3)+4(2)\\11(5)+5(8)&11(6)+5(9)&11(3)+5(2)\\9(5)+8(8)&9(6)+8(9)&9(3)+8(2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}67&78&29\\95&111&43\\109&126&43\end{bmatrix}_{3\times3}$$

2-2-5 قوانين ضرب المصفوفات:

اذا كانت A, B, C مصفوفات متوافقة للجمع والضرب فان

1) $A\,(B + C) = A.B + A.C$

2) $(A + B)\,C = A.C + B.C$

3) $A\,(B.C) = (A.B)\,C$

4) $A.B \neq B.A$

5) $A^r = A.A^{r-1}$

مثال 2-21

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ اذا كانت بين إن $A^2 - 4A - 5I=0$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$4A = 4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5I = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A - 5I = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

مثال 2-22

اوجد المصفوفة A حيث ان

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$3 + a_{11} = 1 \rightarrow a_{11} = -2$ $\quad$ $4 + a_{21} = 0 \rightarrow a_{21} = -4$

$7 + a_{12} = 3 \rightarrow a_{12} = -4$ $\quad$ $-1 + a_{22} = 2 \rightarrow a_{22} = 3$

$2 + a_{13} = 2 \rightarrow a_{13} = 0$ $\quad$ $3 + a_{23} = 3 \rightarrow a_{23} = 0$

$5 + a_{14} = 1 \rightarrow a_{14} = -4$ $\quad$ $0 + a_{24} = -1 \rightarrow a_{24} = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مثال 2-23

اوجد حاصل الضرب (A.B) ، (B.A) للحالات الاتية

One) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = [2(4) + 3(5) + 6(-1)] = (17)$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 10 & 15 & -5 \\ 12 & 18 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Two)}\ A=\begin{pmatrix}1&5&6\\2&3&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$A.B=\begin{pmatrix}1&5&6\\2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+15+6\\4+9+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\17\end{pmatrix}$$

$$B.A=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5&6\\2&3&4\end{pmatrix}$$

لا يمكن ايجاد الضرب (B.A) لان اعمدة B لا تساوي صفوف A.

مثال 24-2

اذا كانت $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}$ أوجد A^3

$$A^3=A.A.A=A^2.A$$

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A.A^2=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&3\\0&-1\end{pmatrix}$$

2-3 المحددات [Determinants]

يقابل كل مصفوفة مربعة $A=[a_{ij}]$ ذات السعة $(n\times n)$ والتي عناصرها اعداد حقيقية ، عدد حقيقي يسمى محدد المصفوفة (A) ، ويرمز له عادة بـ(det (A أو |A| وقد يكتب كآلاتي:

$$|A|=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{an} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ويطلق على |A| المحدد من المرتبة أو السعة (n) ، ويجدر الاشارة ان هذا الشكل المربع من الاعداد الحقيقية المحصورة بين مستقيمين راسيين ليس مصفوفة انما هو عدد ، الذي يقترن بالمصفوفة المربعة A .

2-3-1 المحدد الثنائي [The Determinant of Two]

يقصد بالمحدد الثنائي المحدد من المرتبة الثانية أي المتكون من صفين وعمودين ويكتب بالصيغة التالية:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

فتكون قيمته كما يلي

$$|A| = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحا منه عناصر القطر الثانوي

مثال 25-2

اوجد قيم المحددات التالية

1. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(5) = 8 - 5 = 3$

2. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -18 - (-8) = 18 + 8 = 26$

2-3-2 المحدد الثلاثي (The Determinant of Three)

الصيغة العامة للمحدد من الرتبة الثالثة هي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ان مفكوك المحدد الثلاثي يتكون من ستة حدود ثلاثة منها باشارة موجبة وثلاثة منها باشارة سالبة ، ويمكن ايجاد قيمته بطريقة خاصة يمكن تلخيصها كما يلي:

1. نضع العمودين الاول والثاني الى يمين المحدد.

2. ناخذ الصف الاول ونضرب كل عنصر من عناصره في العنصرين الواقعين معه على نفس القطر ثم نجمع حواصل الضرب.

3. ناخذ عناصر الصف الثالث من المحدد ونضرب كل عنصر من

عناصره في العنصرين الواقعين معه على نفس القطر ثم نجمع حواصل الضرب.

4. نطرح ناتج الخطوة (3) من ناتج الخطوة(2) فنحصل على قيمة المحدد.

مثال 2-26

اوجد قيمة المحدد الاتي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \\ 2 & 11 \end{matrix}$$

$$= (5\times6\times1+7\times0\times2+5\times3\times11)-(2\times6\times5+11\times0\times5+1\times3\times7)$$
$$= 294-117 = 177$$

2-3-3 فك المحددات بواسطة العوامل المتممة

(Expanding the Determinant by the Cofactors)

وهي طريقة عامة لايجاد قيمة أي محدد من أي مرتبة وتحتاج الى المفاهيم الاتية:

المحيدد (Minor) : لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة ذات سعة (n×n) فيعرف (M_{ij}) محيدد العنصر (a_{ij}) الناتج من (A) بحذف عناصر الصف رقم (i) والعمود رقم (j).

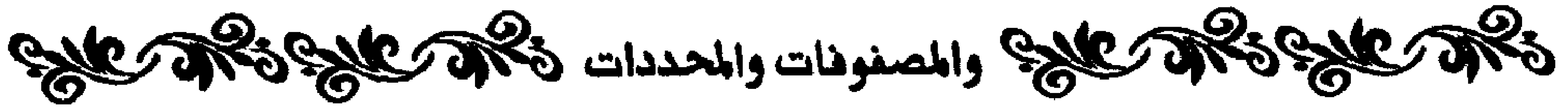
لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة ذات السعة (3×3).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{32} - a_{12}.a_{31}$$

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31}$$

العامل المتمم (Cofactor): لتكن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة ذات ابعاد (n×n) فيعرف العامل المتمم للعنصر (aij) والذي يرمز له ب(A_{ij}) بانه محيد العنصر (a_{ij}) مضروبا في $(-1)^{i+j}$ فمثلا:



$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}.a_{32} - a_{12}.a_{31}) = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$$

واذا رجعنا الى مفكوك المحدد الثلاثي نجد ان

$$|A| = a_{11}|M_{11}| + a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

وبذلك يمكن ايجاد قيمة المحدد (A) كمجموع حاصل ضرب عناصر أي صف او عمود في عواملها المتممة . وكما يلي عند اعتماد عناصر الصف الاول.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

مع ملاحظة افضلية اختيار الصف او العمود الذي فيه اكثر أصفار.

مثال 27-2

استخدام طريقة العامل المتمم لايجاد قيم المحددات الاتية:

$$1\text{- } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

بفك عناصر الصف الاول

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= (-1)^{1+1}.1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.2\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 2\,(-34) + (-16) = 2 + 68 - 16 = 54$$

بفك عناصر العمود الرابع

$$2\text{-}\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}$$

$$= 0.A_{11} + 0.A_{24} + (-6)A_{34} + 0.A_{44}$$

$$= -6(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -6(7) = -42$$

2-4 خواص المحددات (Properties of Determinats)

فيما يلي اهم خواص المحددات

1. اذا كانت A مصفوفة مربعة ذات سعة(n×n) فان

$$|A'| = |A|$$

2. اذا كانت (B) هي الحاصلة من (A) بابدال صفين (او عمودين)

كل محل الاخر فان:

$$|B| = -|A|$$

3. اذا تساوى صفان (او عمودان) في المصفوفة (A) فان

$$|A| = 0$$

4. اذا كانت (B) هي المصفوفة الحاصلة من ضرب جميع عناصر الصف (او العمود) الواحد في الكمية الثابتة (k) من المصفوفة A فان:

$$|B| = k|A|$$

5. اذا كانت

$$A = \begin{vmatrix} a & c+d \\ e & g+h \end{vmatrix} \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix}$$

6. اذا كانت (B, A) مصفوفتين مربعتين ذات سعة (n×n) فان

$$|A.B| = |A|.|B|$$

7. اذا كانت A مصفوفة مربعة قطرية ذات سعة (n×n) فان

$$|A| = a_{11}a_{22}.......a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$



8. اذا كانت A مصفوفة مربعة ذهت سعة(n×n) بالشكل الاتي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

والتي تسمى مصفوفة المثلث السفلي (Lower triangular) حيث تكون كل العناصر فوق القطر الرئيسي مساوية للصفر فان

$$|A| = a_{11}a_{22}.....a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

وتنطبق نفس الخاصية على مصفوفة المثلث العلوي (upper triangular) حيث تكون العناصر تحت القطر الرئيسي مساوية للصفر.

مثال 2-28

اذا كانت

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$E=\begin{pmatrix}3&3&5\\2&2&0\\1&1&4\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&3&8\\0&0&2\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}5&0&0\\2&1&0\\3&4&2\end{pmatrix}$$

فان:

.1

$$|A|=12+2=14$$

$$|A'|=\begin{vmatrix}4&2\\-1&3\end{vmatrix}=12+2=14$$

أي ان

$$|A|=|A'|$$

وهو توضيح الخاصية الاولى

2. اذا كانت D مصفوفة ناتجة من ابدال العمودين الثاني والثالث في المصفوفة C الواحد محل الاخر فان:

$$|C|=1\begin{vmatrix}3&1\\-1&-1\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}2&3\\4&-1\end{vmatrix}=-2+14=12$$

وان

$$|D|=\begin{vmatrix}2&1&3\\4&-1&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&3\\-1&-1\end{vmatrix}+(-1)(-1)\begin{vmatrix}2&3\\4&-1\end{vmatrix}$$

$$=2-14=-12$$

أي ان

$$|D| = -|C|$$

وهوتوضيح الخاصية الثانية

3. في المصفوفة E يتساوى فيها العمودان الاول والثاني فان

$$|E| = -2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2(7) + 2(7) = -14 + 14 = 0$$

وهوتوضيح للخاصية الثالثة

4. اذا ضربنا عناصر الصف الاول في المصفوفة A بالعدد (3) فان

$$\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 6 = 42 = 3(12) = 3|A|$$

وهو توضيح للخاصية الرابعة

5. للمصفوفةB إن

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 14 = 6$$

ويمكن كتابة محددها كما يلي:

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 3+4 \\ 2 & 1+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|B| = (5-6) + (15-8) = -1 + 7 = 6$$

وهو توضيح للخاصية الخامسة

6. للمصفوفتين (A, B) فان

$$A.B = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 16 & 26 \end{vmatrix}$$

فان

$$|A.B| = (18)(26) - 16(24) = 468 - 384 = 84$$

$$|A| = 14 \qquad |B| = 6$$

$$|A|.|B| = 14(6) = 84 = |A.B|$$

وهوتوضيح للخاصية السادسة

7. للمصفوفة D فـان $30 = 5*6 = 5\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |D|$, وحـسب



الخاصية 7 فان

$|D| = d_{11}d_{22}d_{33} = 5*6*1 = 30$ وهو توضيح للخاصية السابعة .

8. للمصفوفتين F,G فان

$$|F| = f_{11}f_{22}f_{33} = 1*3*2 = 6$$
$$|G| = g_{11}g_{22}g_{33} = 5*1*2 = 10$$

وعند ايجاد قيم محدد المصفوفتين بطريقة العوامل المتممة فان

$$|F| = 1\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1*6 = 6$$
$$|G| = 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5*2 = 10$$

وهو توضيح للخاصية الثامنة

2-4 تطبيقات المصفوفات والمحددات:

2-4-1 إيجاد معكوس المصفوفة (Inverse of Matrix):

2-4-1-1 المصفوفة المنفردة (The Singular Matrix):

إذا كانت قيمة محدد المصفوفة المربعة A يساوي صفرا فان المصفوفة تسمى بالمصفوفة المنفردة ، وما عدا ذلك فتسمى المصفوفة غير المنفردة.

مثال 29-2

بين ان المصفوفة A هي مصفوفة منفردة وان B غير منفردة.

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&2\\5&4&5\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=15+20+4-(5+24+10)=39-39=0$$

فالمصفوفة A هي منفردة

$$B=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&1\\4&3&2\end{pmatrix}\Rightarrow |B|=8+4+9-(24+6+2)=-1$$

فالمصفوفة B هي غير منفردة

2-4-1-2 المصفوفة المرافقة (The Ad joint Matrix):

لتكن A مصفوفة مربعة ذات سعة (n×n) فان المصفوفة

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{an}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$$

تسمى بالمصفوفة المرافقة ل(A) ويرمز لها بـ adj(A)، وانها مصفوفة مربعة وان (A_{ij}) يمثل مرافق العنصر (a_{ij}).

مثال 30-2

اوجد المصفوفة المرافقة للمصفوفة A

$$A=\begin{pmatrix}2&0&3\\3&1&4\\1&2&5\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&4\\2&5\end{vmatrix}=-3 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}3&4\\1&5\end{vmatrix}=11$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=5 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}0&3\\2&5\end{vmatrix}=-6$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2&3\\1&5\end{vmatrix}=7 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0&3\\1&4\end{vmatrix}=-3 \qquad A_{32}=\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=1$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}=2$$

وان منقول مصفوفة المتمات تسمى بالمصفوفة المرافقة أي ان

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}-3&6&-3\\-11&7&1\\5&-4&2\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}-3&-11&5\\6&7&-4\\-3&1&2\end{pmatrix}$$

2-4-1-3 معكوس المصفوفة:

اذا كانت A مصفوفة مربعة غير منفردة فان لها معكوس واحد فقط (وحدانية معكوس المصفوفة) ويرمز له (A^{-1}) (يقرأ معكوس A) يحسب بالعلاقة الآتية:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

واذا كانت (Aو B) مصفوفات مربعة من الرتبة (n) حيث ان (AB=BA=I) فان B تسمى معكوس A ($B = A^{-1}$) وان A تسمى معكوس B ($A = B^{-1}$).

مثال 2-31

جد معكوس المصفوفات الآتية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4 - 6 = -2 \qquad A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+8-1-24 = -15$$

وبعد ايجاد متممات عناصر المصفوفة (B) نحصل على المصفوفة المرافقة الآتية:

$$A_{dj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -8 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & -11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{adj(B)}{|B|} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

وللتحقيق عن صحة معكوس تلك المصفوفات نجد:

$$A.A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

وكذلك بالنسبة للمصفوفة B فان

$$B.B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} . -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$B.B^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ملاحظة:

ان معكوس المصفوفة القطرية غير المنفردة $\text{diag.}(K_1, K_2, \ldots, K_n)$

هي مصفوفة قطرية تمثل $\text{diag.}\left(\frac{1}{K_1}, \frac{1}{K_2}, \ldots, \frac{1}{K_n}\right)$

مثال 2-32

اوجد معكوس المصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2-4-2 حل المعادلات الخطية (Solution of Linear Equations)

اذا كان لدينا منظومة المعادلات الخطية التالية التي تحوي على (n) من المتغيرات و(m) من المعادلات.

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m$$

ويمكن وضع تلك المنظومة بصيغة المصفوفات وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{an} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

وبشكل أكثر إيجازاً $AX = B$

اذ ان $A=[a_{ij}]$ هي مصفوفة المعاملات وان

X هي مصفوفة المجاهيل

B هي مصفوفة ثوابت الطرف الايمن

هناك عدة طرق لحل مجموعة المعادلات الخطية وهي

2-4-2-1طريقة كريمير (أو طريقة المحددات)(Gramers Rule):

لنفرض ان (Ai) اذ ان $(i = 1, 2,\ldots, n)$ مصفوفة نحصل عليها من ابـدال العمـود (i) بعمـود الثوابـت b_i في الطـرف الايمـن لمجموعـة المعادلات، واذا كانت $|A| \neq 0$ فان للمجموعة $AX=B$ حل فريد هو

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

مثال 33-2

حل منظومة المعادلات الاتية بطريقة كريمر:

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 9$$
$$X_1 - 3X_2 - 2X_3 = -5$$
$$2X_1 + 7X_2 + 2X_3 = 7$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} \qquad X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 9 \\ -5 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3(8) - 2(6) + 1(13) = 25$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 9(8) - 2(4) + 1(-14) = 50$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 3(4) - 9(6) + 1(17) = -25$$



$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 1 & -3 & -5 \\ 2 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 3(14) - 2(17) + 9(13) = 125$$

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{50}{25} = 2$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-25}{25} = -1$$

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{125}{25} = 5$$

2-4-2-2 طريقة معكوس المصفوفة:

بعد ان تكتب مجموعة المعادلات الخطية بصيغة المصفوفات بالشكل

$$AX = B$$

فان مصفوفة المجاهيل(X) يمكن ايجادها كما ياتي:

$$X = A^{-1} B, \qquad |A| \neq 0$$

مثال 34-2

جد حل منظومة المعادلات الاتية بطريقة معكوس المصفوفة

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 18$$

$$X_1 - 2X_2 + 7X_3 = 4$$

$$2X_1 + 3X_2 - X_3 = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد معكوس المصفوفة (A) نستخرج مصفوفة العوامـل المتممـة (A_{ij}) وكما ياتي:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 21 = -19$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 14) = 15$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 3) = 6$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 6) = 0$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 2 = 23$$

$$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-(14-1)=-13$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7$$

$$|A|=2(-19)+3(15)+1(7)=14\neq 0$$

$$adj(A)=(Aij)^T=\begin{pmatrix}-19 & 15 & 7\\ 6 & -4 & 0\\ 23 & -13 & -7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-19 & 6 & 23\\ 15 & -4 & -13\\ 7 & 0 & -7\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-19 & 6 & 23\\ 15 & -4 & -13\\ 7 & 0 & -7\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-19 & 6 & 23\\ 15 & -4 & -13\\ 7 & 0 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\ 4\\ 7\end{pmatrix}$$

$$X_1=\frac{1}{14}[(-19)(18)+6(4)+23(7)]=-\frac{157}{14}$$

$$X_2=\frac{1}{14}[(15)(18)+(-4)(4)+(-13)(7)]=\frac{163}{14}$$

$$X_3=\frac{1}{14}[(7)(18)+0(4)+(-7)(7)]=\frac{77}{14}$$

تمارين الفصل الثاني

1. اذا كان $U=(8,2,-1)$ ، $V=(3,7)$ اوجد

a)U+3V, ، b) 2U-V, c) U+V

2. اذا كـان $A = (-2 \quad 0 \quad 1)$ ، $B=(3 \ -4 \ 5)$ ، $C = (3 \quad 9 \quad 2)$

أوجد $\|A\|$, $\|B\|$, $\|C\|$, $\|A+B\|$, $\|A-B\|$

3. اوجد قيم (X, Y) اذ ان

$$\begin{bmatrix} X \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ X+Y \end{bmatrix}$$

4. احسب قيم (X, Y, Z) اذ ان

$$X.\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + Y\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + Z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5. بين ان المتجهات الاتية هي معتمدة خطيا ام غير معتمدة خطيا.

a) $v_1 = (0\ \ 3)$ $\qquad v_2 = (2\ \ -1)$ $\qquad v_3 = (1\ \ 2)$

b) $v_1 = (1\ \ 2\ \ 0)$ $\quad v_2 = (0\ \ -1\ \ 2)$ $\qquad v_3 = (2\ \ 0\ \ 1)$

6. اوجد قيم (X, Y, Z) التي تجعل المعادلة الاتية صحيحة

$$\begin{bmatrix} X+2 & 5 \\ Y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X-3 & 5 \\ 6-Y & 1+2Z \end{bmatrix}$$

7. اذا كانت

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ أوجد A^3

8. اكتب المعادلات الاتية بصيغة المصفوفات

$$5X + 2 = -3Y$$

$$X - 6X = 3$$

9. اذا اعطيت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

أحسب $A + B - 7I$



10. احسب قيم كل من (d, c, b, a) اذا كان

$$2\begin{bmatrix} a & -b \\ 3c & -2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 1 \\ c & 3+2d \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & a-b \\ a+b & 2c \end{bmatrix}$$

11. احسب قيمة X التي تحقق المعادلة الاتية

$$\begin{bmatrix} X & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

12. اذا اعطيت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

اوجد $D = \begin{bmatrix} p & a \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ إذ إن $A + B + D = 0$

13. احسب قيم المحددات الاتية

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

14. بين صحة المعادلة $|A.B| = |A|.|B|$ اذا كان

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

15. للمصفوفات الاتية احسب المصفوفة المرافقة ومعكوس المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}, \quad \left|\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

16. لمنظومات المعادلات الاتية استخدم طريقة كريمير لايجاد حلولها

a) $X_1 + 2X_2 + X_3 = 3$

$2X_1 + X_2 + 2X_3 = -1$

$2X_1 + X_2 + 2X_3 = -5$

b) $X_1 + X_2 + X_3 = 2$

$X_1 - X_2 + X_3 = 6$

$X_1 + X_2 + X_3 = -4$

c) $3X_1 - X_3 + 4X_3 = 18$

$2X_1 + 6X_2 + 4X_3 = 11$

$X_2 - 3X_1 + 6X_3 = 7$



d) $-2X_1 + 3X_2 + X_3 = 3$

$2X_2 + X_1 + X_3 = 1$

$3X_3 - X_2 - X_1 = 6$

e) $X_1 + X_2 + X_3 = 4$

$2X_2 + 3X_1 + 4X_3 = 0$

$3X_1 + 6X_2 + 9 = -10X_3$

17. استخدام معكوس المصفوفة في حل منظومات المعادلات الآتية:

a) $X_1 + X_2 + 3X_3 = 8$

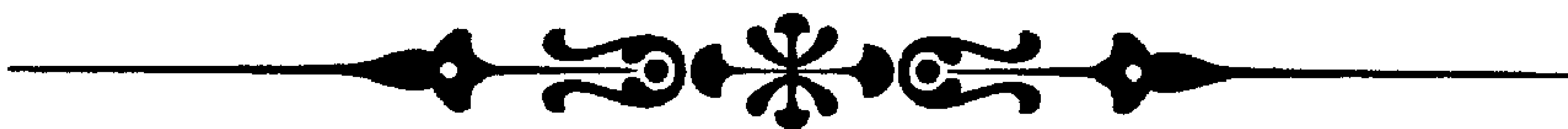
$2X_1 + X_2 + 2X_3 = 6$

$X_1 + 2X_2 + X_3 = 0$

b) $8X_1 + 6X_2 + 10X_3 = 46$

$5X_1 + 4X_2 + 2X_3 = 25$

$6X_2 + 25X_1 + 4X_3 = 15$






الفصل الثالث

التفاضل Differentiation

1-3 العلاقات Relations

2-3 الدوال Functions

3-3 الصيغ غير المعرفة Indeterminate forms

3-4 الغاية للدالة Limit of function

3-5 المشتقات وقوانينها

3-6 تفاضل الدوال غير الجبرية

3-7 التفاضل الضمني Implicit derivative

3-8 الاشتقاقات العليا Higher derivative

3-9 تطبيقات التفاضل

3-10 الاستمرارية Continuity

3-11 التفاضل الجزئي partial differentiation



التفاضل Differentiation

3 – العلاقات والدوال

3ـ1 العلاقات Relations

لتكن A,B مجموعتين غير خاليتين وان P(a,b) تعبير مفتوح ذو متغيرين b,a حيث $a\in A$ وان $b\in B$ فنقول على ان (A,B,P(a,b)) علاقة ثنائية من المجموعة Aالى B . ويمكن ان نرمز لها بحرف واحد هو R وتكتب R(A,B,P(a,b))

مثال 1-3

اذا كانت A={1,2,3} و B={2,4,5,6} فان R1={A,B,a<b}

فتكتب العلاقة بالشكل R1=({1,2,3},{2,4,5,6},<)

3ـ1ـ1 بيان العلاقة

اذا كانت {R{A,B,P(a,b)} }(علاقة ما فان مجموع الازواج المرتبة (a,b) تدعى بيان العلاقة R ويرمز لها بـ R^* اي ان

$$R^* = \{(a,b), a\in A, b\in B, aRb\}$$

مثال 2-3:

اذا كانت $A=\{2,3,4,5\}$ و $B=\{3,6,7,10\}$ وان aRb معرفةبـ $(\frac{a}{b})$

فان $R=(A,B,\frac{a}{b})$ وان $R^{*}=\{(2,6),(2,10),(3,3),(3,6),(5,10)\}$

مثال 3-3

لـتكن $A=\{2,3,5,7\}$ و $B=\{4,6,8\}$ وان العلاقـة R مـن A الىB

معرفة بمايلي aRb اذا وفقط اذا b=a+1 فان $R^{*}=\{(3,4),(5,6),(7,8)\}$

مثال 4-3

اذا كانـــت $A=\{1,2,3,4,5,9,16,25\}$ وان aRb اذا وفقـــط اذا

$b=a^2$ فان

$$R^{*}=\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$$

3ـ2 الـدوال Functions

لتكن f علاقة من المجموعة A غير الخالية الى المجموعة B فيقال ان f دالة من A الى B اذا اقترن مع اي عنصر في A عنصر وحيد في B ، ويعبر عن ذلك كالاتي

$f : A \to B$ $\quad\quad$ $A \xrightarrow{f} B$

او

وتعتبر f دالة من A الى B اذا استوفت الشروط الاتية :

1. علاقة من A الى B وبذلك $f \subset A \times B$

2. لكل $a \in A$ يوجد $b \in B$ بحيث $(a,b) \in f$

3. اذا كانت $(a,b) \in f ,,, (a,b') \in f$ فان $b = b'$

اذا كانــت f دالــة مــن A الى B وكــان $(a,b) \in f$ فاننــا نكتــب $b = f(a)$ ويطلق على $f(a)$ صورة العنصر a بفعل الدالة f كما يقال ايضاً ان f(a) قيمة الدالة f في a.

واذا كانــت $f : A \to B$ فتــسمى المجموعــة A منطلــق (Domain) الدالة f كما تسمى المجموعة B مستقر (Co domain) الدالــة f ، ويطلــق على المجموعة التي تتكون من صورة كل عنصر من عناصر المجموعــةA بفعل f مدى(Range) الدالة ويرمز له بـ $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$.

تعريـف: يقــال للــدالتين $f : A \to B$ و $g : A \to B$ انهــما متــساويتان

وتكتب f=g اذا كان f(a)=g(a)

$\forall a \in A$ واذا وجد على الاقل عنصر واحد في A بحيث

$f(a) \neq g(a)$ فان $f \neq g$.

3-3 الصيغ غير المعرفة Indeterminate forms

ان كل من $\frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0*\infty, \frac{0}{0}, \infty^0, 0^0, 1^\infty$ تسمى صيغ غير معرفة، تظهر هذه الصيغ نتيجة لتعويض اعداد معينة في بعض الدوال وتركيباتها .

3-4 الغاية للدالة Limit of function

يعتبر مفهوم الغاية من اهم المفاهيم في التفاضل والتكامل وفي كثير من فروع الرياضيات ولاجل ان نقرب مفهوم الغاية تأمل المثال الاتي

مثال 5-3

تأمل الدالة $f: R \rightarrow R$ بحيث ان لكل $X \in R$

$$f(x)= x^2-1$$

فلو اعطينا قيماً لـ x اقل بقليل من العدد 2 واكثر بقليل من العدد 2 . فالجدول الاتي الذي نلاحظ فيه ان قيمة الدالة f تقترب جداً الى العدد 3 كلما اقتربت قيمة x من العدد 2.

X<2	f(x)	x>2	f(x)
1.7	1.89	2.3	4.29
1.9	2.61	2.1	3.41
1.99	2.96	2.001	3.004
1.9999	2.9996	2.0001	3.0004

فيمكن القول ان غاية الدالة $f(x) = x^2-1$ في العدد 2 هي 3 .

مثال 5-3

تأمل الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ عندما $x \neq 1$

نلاحظ انه عندما x=1 يكون الطرف الايسر $\frac{0}{0}$ وهذه صيغة غير معرفة ، هذا يعني ان f(1) صيغة غير معرفة وعليه تكون الدالة f غير معرفة عندما x=1، لنلاحظ قيم الدالة عندما تكون قيم x قريبة من 1 وذلك في الجدول التالي . اذ يتضح انه عندما يقترب x من العدد 1 فان غاية الدالة f(x) تقترب من العدد 2 وهذا يعني انه على الرغم من ان الدالة غير معرفة عندما x=1 فانها تقترب من العدد 2 عندما x تقترب من العدد 1 . يسمى العدد 2 غاية الدالة f عندما تقترب من 1 ويرمز له بما يلي

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

X<1	f(x)	x>1	f(x)
0.5	1.5	1.5	2.5
0.8	1.8	1.2	2.2
0.9	1.9	1.1	2.01
0.99	1.99	1.001	2.001
0.999	1.999	1.0001	2.0001

ان مفهوم الاقتراب يعني بصورة ادق ان الفرق بين f(x) والعدد 2 يقل كلما قل الفرق بين x والعدد 1 وبصورة عامة فان $\lim_{x\to a} f(x) = L$ اذ ان L,a اعداد حقيقية ، تعني انه كلما قل الفرق بين العددين f(x),L يقل الفرق بين العددين x,a ويعبر عن ذلك بصيغة رياضية دقيقة كما في التعريف الاتي

تعريف: يقال ان $\lim_{x\to a} f(x) = L$ اذا وفقط اذا تحقق الشرط الاتي :
لكل عدد حقيقي $\in > 0$ يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث ان

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \in$$

وهذا يعني انه عندما تكون x قريبة من a فان f(x) تكون قريبة من L مع ملاحظة ان الرمز $\in$ يقرأ ابسلون وان الرمز δ يقرأ دلتا .

3.4.1 الغاية من اليسار والغاية من اليمين

في تعريف الغاية لاحظنا اقتراب المتغير من اليمين ومن اليسار وفي بعض الحالات تحتاج لاقتراب المتغير من اليمين فقط او من اليسار فقط وذلك يقودنا لتعريف غايتين جديدتين هما الغاية من اليسار والغاية من اليمين .

الغاية من اليسار:

يقال ان $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ اذا وفقط اذا تحقق الشرط الاتي

لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \in$$

الغاية من اليمين :

يقال ان $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ اذا وفقط اذا تحقق الشرط الاتي

لكل $\in > 0$ هناك $\delta > 0$ بحيث ان

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L_2| < \in$$

مثال 3-6 افرض ان

$$f(x) = \begin{bmatrix} 6x - 2 & if x > 1 \\ 5 & x = 1 \\ -x + 5 & x < 1 \end{bmatrix}$$

هل ان $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ لها وجود

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(6x-2) = 6-2 = 4$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x+5) = -1+5 = 4$$
$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 4$$

ولكن f(1)=5 اي ان الغاية لهذه الدالة ليس لها وجود .

3.4.2 بعض خواص الغاية

1. اذا كان y=f(x)=c (c كمية ثابتة) فان:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

اذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ وان $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$

2. (k كمية ثابتة)

$$\lim_{x\to a}[k.f(x)] = k\lim_{x\to a} f(x) = k.A$$

3. $$\lim_{x\to a}[f(x) \mp g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \mp \lim_{x\to a} g(x) = A \mp B$$

4. $$\lim_{x\to a}[f(x)\ .\ g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\ .\ \lim_{x\to a} g(x) = A\ .\ B$$

5. $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B},\ B \neq 0$$

6. $$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$$ كمية حقيقية

A

ملاحظة: لايجاد قيمة غاية اي دالة نبدا بتطبيق الخواص السابقة ثم نعوض عن المتغير بالقيمة التي تقترب فيها فاذا كانت النتيجة عدداً حقيقياً فان هذا العدد هو قيمة الغاية ، اما اذا كانت النتيجة صيغة غير معرفة فعندئذ يجب ازالة عدم التعريف وهناك طرق كثيرة منها

1. طريقة التحليل الى العوامل 2. طريقة الضرب بالمرافق

3. طريقة تبديل المتغير

مثال7-3:

اوجد غايات كل من الدوال الاتية:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x+5)=\lim\limits_{x\to 1}3x^2+\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}5$

$=3\lim\limits_{x\to 1}x^2+2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}5=3(1)+2(1)+5$

$=10$

2. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+1)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-4\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1$

$$=4-4(2)+1=-3$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(5x+6)=5(0)+6=6$

4. $\lim\limits_{x\to -2}(4x-2)=4(-2)-2=-10$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+1}{x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(3x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}=\dfrac{3(3^2)+1}{3-2}=\dfrac{27+1}{1}=28$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x+5}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x+5}}=\sqrt{\dfrac{1+1}{1+5}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+4)-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\cdot\dfrac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{9-\left(x^2+5\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)=3+3=6$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{9x+7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3x}{x}-\frac{2}{x}}{\frac{9x}{x}+\frac{7}{x}}=\lim\dfrac{3-2/x}{9+\frac{7}{x}}=\dfrac{3-0}{9+0}=\dfrac{1}{3}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}$ القسمة على اكبر أس

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\dfrac{6+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{6-\frac{3}{\infty}+\frac{4}{\infty}}=\dfrac{6+0+0}{6-0+0}=\dfrac{6}{6}=1$

13. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t2}{t+1}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\frac{t^2}{t^2}}{\frac{t}{t^2}+\frac{1}{t^2}}=\dfrac{1}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\dfrac{1}{0}=\infty$

14. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2xh+h^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x+0=2x$

15. $\lim\limits_{y\to1}\dfrac{\sqrt{y^6}-1}{\sqrt[3]{y^6}-1}=\lim\limits_{y\to1}\dfrac{y^3-1}{y^2-1}=\lim\limits_{y\to1}\dfrac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}$

$=\lim\limits_{y\to1}\dfrac{y^2+y+1}{y+1}=\dfrac{1+1+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$

16. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{2x^2-3x-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x^3-3x^2)+(x-3)}{(2x+3)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2(x-3)+(x-3)}{(2x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x^2+1)}{(2x+3)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+1}{2x-3}=\dfrac{3^2+1}{6+3}=\dfrac{10}{9}$

3.5 المشتقات وقوانينها:

3.5.1 مفهوم مشتقة الدالة:

المشتقة للدالة f هي دالة يرمز لها f' بحيث ان قيمتها في أي عـدد (x) هو:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

على ان تكون هذه الغاية موجودة.

وتقرأ $f'(x)$ (f prime of x) مشتقة الدالـة f بالنـسبة الى x وهنـاك رموز اخرى تستعمل للتعبير عن مشتقة الدالة y=f(x) بالنسبة الى x هي

$$y',\frac{dy}{dx},\frac{d}{dx}f(x),Dx$$

ويقال للدالة f(x) انها قابلة للاشـتقاق او تفاضـلية في العـدد (a) اذا كانت $f'(a)$ موجودة والا فهي غير قابلة للاشتقاق.

مثال3-8:

جـد مـشتقة الدالـة $f(x) = x^2-5x$ باسـتعمال التعريـف ثـم جـد

$f'(0),f'(3)$

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)=x^2+2x\Delta x+\Delta^2 x-5x-5\Delta x$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=x^2+2x\Delta x+\Delta^2 x-5x-5\Delta x-x^2+5x$$

$$=2x\Delta x+\Delta^2 x-5\Delta x$$

وبالقسمة على Δx ينتج:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2x+\Delta x-5$$

ويأخذ الغاية عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على

$$f'(x)=2x-5$$

$$f'(0)=2(0)-5=-5$$

$$f'(3)=2(3)-5=1$$

مثال 9-3:

جد مشتقة الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=\frac{-1}{(x+\Delta x)x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\mathrm{Lim}-\frac{1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}$$

مثال **10-3**:

جد مشتقة الدالة التالية:

$$y = \sqrt{2x+1} \qquad x \geq 0$$

$$y + \Delta y = \sqrt{2(x+\Delta x)+1} = \sqrt{2x+2\Delta x+1} = (2x+2\Delta x+1)^{1/2}$$

$$\Delta y = (2x+2\Delta x+1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}$$

$$\Delta y = \left[(2x+2\Delta x+1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}\right] \left[\frac{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{2\Delta x}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x-2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}} = \frac{2}{2(2x+1)^{1/2}}$$

$$= (2x+1)^{-1/2}$$

3.5.2 قاعدة لوبيتال L'Hopital Rule

اذا كانت a عدد حقيقي وكانت f,g دالتين قابلتين للاشتقاق بحيث

ان f(a)=g(a)=0 وان الغاية $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة فعندئذ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال 10-3:

احسب الغاية $\lim_{x\to 1}\frac{4x^4-5x^3+1}{x^2-1}$

نلاحظ ان $4x^4-5x^3+1$ تحقق شرط f(1)=0 كما ان x^2-1 تحقق

شرط g(1)=0 وعليه فان الغاية ستكون

$$\lim_{x\to 1}\frac{16x^3-15x^2}{2x}=\frac{16(1)-15(1)}{2(1)}=\frac{1}{2}$$

كما ان هناك نتيجة لهذه القاعدة وهي :

اذا كانت f,g دالتين وكان a عدد حقيقي او ∞او ∞- بحيث ان

$\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ وان $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ موجودة فعندئذ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال 11-3

جد الغاية $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{2x^2+4}$

يمكن ملاحظة ان الغاية تحقق شروط النتيجة وعليه فانها تساوي (بتطبيق النتيجة)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{4x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

3.5.3 قوانين الاشتقاق:

1. اذا كان f(x)=c اذ ان c ثابت حقيقي فان $f'(x)=0$.

2. اذا كان n عدد صحيح موجب وكانت $f(x)=x^n$ فان

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

3. اذا كان c ثابتا وكانت f دالة قابلة للاشتقاق فان

$$\frac{d}{dy}[cf(x)]=c.f'(x)$$

4. لتكن f(x) ، g(x) دالتين قابلتين للاشتقاق فان:

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=f'(x)+g'(x)$$

5. اذا كانت f(x) ، g(x) دالتين قابلتين للاشتقاق فان

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f'(x).\, g(x) + g'(x)f(x)$$

6. اذا كانت f(x) ، g(x) دالتين قابلتين للاشتقاق فان

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$ بشرط ان

أي ان مشتقة الدالة الكسرية = (مشتقة البسط × المقام – مشتقة المقام × البسط) / (مربع المقام)

7. اذا كانت f(x) دالة قابلة للاشتقاق وان n عدد حقيقي فان

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}\frac{df}{dx}$$

8. اذا كان a ثابت و n عدد صحيح موجب فان:

$$\frac{d}{dx}\left(ax^{-n}\right) = -anx^{-n-1}$$

9. اذا كان a ثابتا فان

$$\frac{d}{dx}(ax) = a$$

10. اذا كانت $f(x) = x^{-n}$ حيث n عدد صحيح موجب فان

$$f'(x) = -nx^{-n-1}$$

مثال 12-3:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية

1. $y = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$

2. $f(x) = y = 5x^7 - 2x^6 + 3x^2 - 2x + 4$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 35x^6 - 12x^5 + 6x - 2$$

3. $y = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

4. $y = (3x^2 + 5x)(6x^3 - 2x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = (6x + 5)(6x^3 - 2x^2) + (18x^2 - 4x)(3x^2 + 5x)$$

5. $y = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $y=\frac{x^4}{6x^2-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(6x^2-2)4x^3-x^4(12x)}{(6x^2-2)^2}$

7. $y=(7x^2+5)^4$

$$y'=4(7x^2+5)^3(14x)=56x(7x^2+5)^3$$

8. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-3x}=(x^2-3x)^{1/3}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-3x)^{-2/3}(2x-3)$$

9. $f(x)=\left(6x^2+\sqrt{x^3-2}\right)^6=\left[6x^2+(x^3-2)^{1/2}\right]^6$

$$f'(x)=6\left[6x^2+(x^3-2)^{1/2}\right]^5.\left[12x+\frac{1}{2}(x^3-2)^{-1/2}.3x^2\right]$$

10. $y=\left(\frac{6x^3-12}{15x^2-7}\right)^3$

$$\frac{dy}{dx}=3\left(\frac{6x^3-12}{15x^2-7}\right)^2.\frac{(18x^2)(15x^2-7)-(30x)(6x^3-12)}{(15x^2-7)^2}$$

11. $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{5}{\sqrt{x}}+10$

$$y=3x^{-1/3}-5x^{-1/2}+10$$

$$y'=3\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}-5(-1/2)x^{-3/2}=-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}-\frac{5}{2\sqrt{x^3}}$$

12. $y=\frac{3x^3}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{3x^3}{\left(4x^2+1\right)^{1/2}}$

$$y'=\frac{\left(4x^2+1\right)^{1/2}9x^2-\frac{1}{2}\left(4x^2+1\right)^{-1/2}.8x.9x^2}{4x^2+1}$$

3.5.4 قاعدة السلسلة The chain rule:

عندما لا تكون العلاقة بشكل مباشر من المتغيرين الاساسيين (x,y) ولايجاد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ هناك حالتان هما:

أ. اذا كان متغير مثل z يقع وسطهما بالعلاقة اي

$$y=f(z)\ ,\ z=f(x)$$

فنستخدم القانون التالي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$$

ب. اذا كان كل من x،y دوال لمتغير ثالث جديد z مثلا أي

$$y = f(z) \ , \ x = f(z)$$

فنستخدم القانون التالي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dz}{dx/dz}$$

مثال 13-3:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الاتية:

1. $y = 6z^3, z = 2x^2 - 3x$

$$\frac{dy}{dz} = 18z^2, \frac{dz}{dx} = 4x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = (18z^2)(4x - 3)$$

2. $y = 4z^5, x = \frac{3}{z^2}$

$$\frac{dy}{dz} = 20z^4, \frac{dx}{dz} = -6z^{-3} = -\frac{6}{z^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{20z^4}{\frac{-6}{z^3}} = -\frac{10}{3}z^7$$

3. $y = \frac{5}{\sqrt{2z}}$ $\qquad z = \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \left(\frac{x}{x-2}\right)^{-1/2}$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{5}{2}(2z)^{-3/2}, \frac{dz}{dx} = 1/2\left(\frac{x}{x-2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(x-2)-x}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{2}(2z)^{-3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x-2)^3}} = -\frac{5}{2\sqrt{(2z)^3 x(x-2)^3}}$$

اوجد $\frac{dy}{dt}$ اذا كان

4. $x = \sqrt{t^3 + 1}$ $\qquad y = x^3 - 4x^2 + 6x$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(t^3 + 1\right)^{-1/2} .3t^2, \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x + 6$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \left(3x^2 - 8x + 6\right)\frac{3}{2}\frac{t^2}{\sqrt{t^3 + 1}}$$

3.6 تفاضل الدوال غير الجبرية:

3.6.1 تفاضل الدوال المثلثية

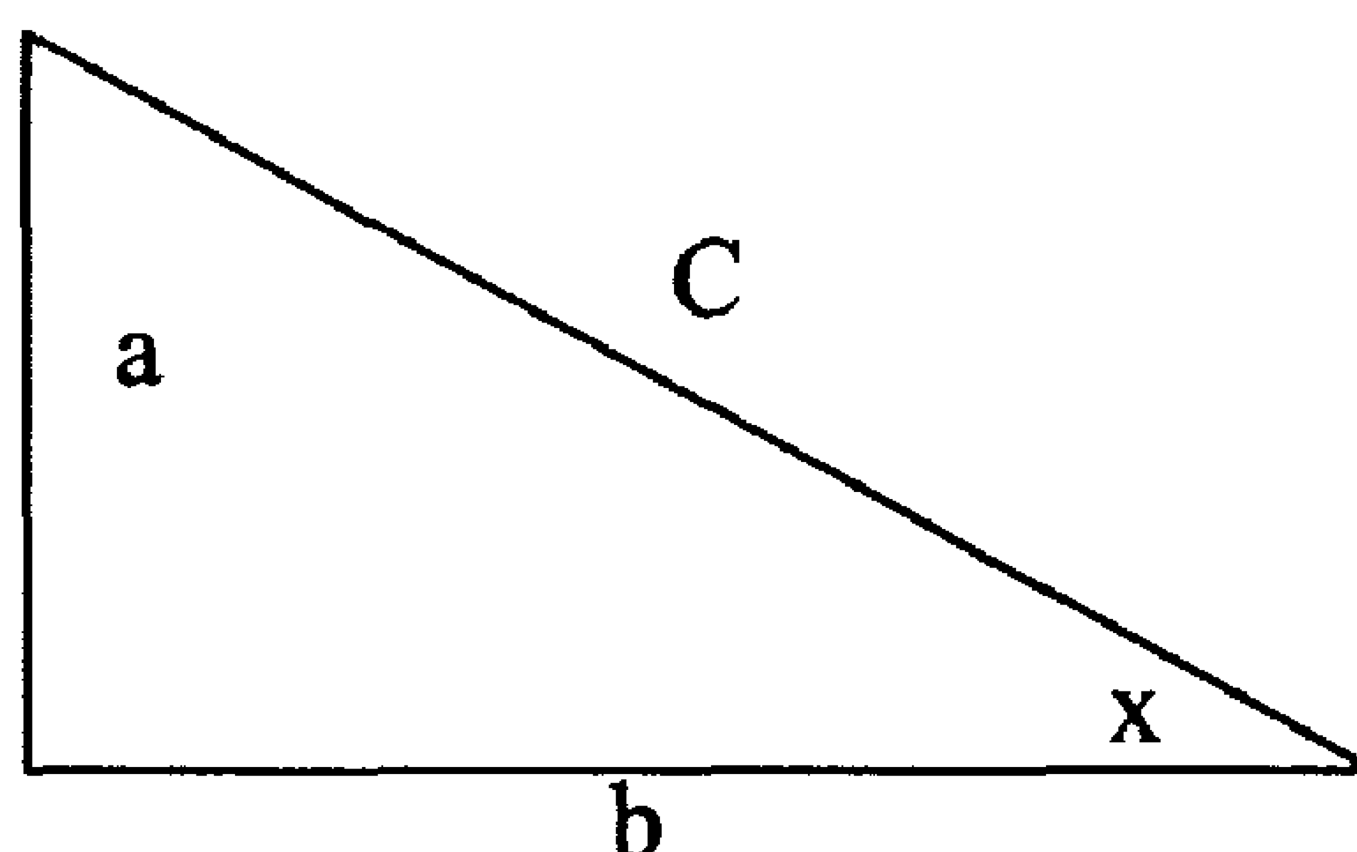
Differentiation of trigonometric functions:

ان الـدوال التـي تحـوي عـلى Sin(x) ، cos(x) ، tan(x)، cot(x) ، sec(x)، csc(x) تمثل دوال مثلثية اذ ان:

$$\text{Sinx} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cosx} = \frac{b}{c}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{a}{b}$$



$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{b}{a}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{c}{b}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{c}{a}$$

وان قوانين التفاضل لهذه الدوال هي

اذا كانت $u=f(x)$ فأن :

1. $y=\sin u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\cos u.\frac{du}{dx}$

2. $y=\cos u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\sin u.\frac{du}{dx}$

3. $y=\tan u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 u}.\frac{du}{dx}=\sec^2 u.\frac{du}{dx}$

4. $y=\cot u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sin^2 u}.\frac{du}{dx}=-\csc^2 u.\frac{du}{dx}$

5. $y=\sec u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\sec u.\tan u\frac{du}{dx}$

6. $y=\csc u \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\csc u.\tan u\frac{du}{dx}$

مثال 14-3:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y=\sin 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\mathrm{Cos}2x.2$

2. $y = \tan(x^2+2x+3)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(x^2+2x+3)(2x+2) = (2x+2)\sec^2(x^2+2x+3)$$

3. $y = \tan^2 x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\tan x.\sec^2 x$

4. $y = \sec^3 \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sec^2\sqrt{x}.\sec\sqrt{x}.\tan\sqrt{x}.\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\sec^3\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$$

5. $y = \frac{1}{2}\tan x \sin 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\tan x \cos 2x.2 + \sin 2x.\frac{1}{2}\sec^2 x$$

$$= \tan x \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 2x \sec^2 x$$

3.6.2 تفاضل الدوال الاسية واللوغارتمية

Differentiation of Exponential & Logarithmic Functions:

أ) الدالة اللوغارتمية Logarithmic function

لـــــــــو تأملنـــــــــا المقـــــــــادير الاتيـــــــــة $[(0.2)^5 = 0.000321, (8^{-1} = \frac{1}{8}), (3^4 = 81), (10)^2 = 100]$ فتـسمى كـل مـن الاسس 6,-2,4,2 التي يرفع لها الاساس بعبارة لوغارتم ، يمكن التعبير عن المقادير الـسابقة بطريقـة اخـرى كـما يـلي $Log_{10} = 2$ $\quad Log_3 81 = 4$

$Log_{0.2} 0.00032 = 5 \qquad Log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{8} = -1$

اذ ان الرمز Log هو اختصار لكلمة لوغارتم كما ان الاساس يكتـب اسفل الرمز ،اي ان لوغـارتم اي عـدد موجـب لاسـاس موجـب (عـدا الواحد) هو الاس الذي لو رفع اليه الاساس لكان الناتج مساوياً العدد. تسمى اللوغارتمات التي اساسها 10 باللوغارتمـات الاعتياديـة وتـسمى اللوغارتمـات التـي اساسـها e(e=2.71828) باللوغارتمـات الطبيعيـة ويرمز لها بـ Lnx لذلك فـان دالـة اللوغـارتم الطبيعـي تكتـب بالـصيغة التالية y=Lnx

يمكن كتابة خواص هذه الدالة بما يلي :

$1. Lnxy = Lnx + Lny$

$2. Ln\frac{x}{y} = Lnx - Lny$

$3. LnX^n = nLnx$

ب) الدالة الاسية The exponential function

اذا كانت x=Lny فان $y = e^x$ والتي تسمى بالدالة الاسية وتمثـل معكوس دالة اللوغارتم ، وتمتاز بالخواص الاتية :

اذا كانت v,u دوال لـ x فان :

$$1.\ e^u e^v = e^{u+v}$$

$$2.\ \frac{e^u}{e^v} = e^{u-v}$$

$$3.\ e^{-u} = \frac{1}{e^u}$$

كما تعتبر الدالة a^u دالة اسية، اذ ان a عدد حقيقـي موجـب وعنـدما تكون a=2.71828 فتكتب بالصيغة e^u وهناك علاقة بين الدالتين a^u ;e^u كما موضحة في ادناه

$$y = a^u$$

$$Lny = Lna^u$$

$$Lny = uLna$$

$$y = e^{uLna}$$

$$a^u = e^{uLna}$$

وان العلاقة الاخيرة يمكن بموجبها تحويل صيغة الدالة الاسـية a^u الى الدالة e^u كما ان للدالة a^u الخصائص الاتية

اذا كانت u,v دوال لـ x فان

$1.a^0 = 1$

$2.a^u a^v = a^{u+v}$

$3.a^{-u} = \frac{1}{a^u}$

$4.(a^u)^v = a^{uv}$

$5.(ab)^u = a^u.b^u$

وان قوانين التفاضل للدوال الاسية واللوغارتمية هي:

$$1.\ y = Lnu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$$

a كمية ثابتة.

$$2.\ y = \underset{a}{Log}\,u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}.\frac{1}{Lna}$$

$$3.\ y = e^u \Rightarrow \frac{dy}{dx}.e^u.\frac{du}{dx}$$

$$4.\ y = a^u \Rightarrow \frac{dy}{dx}.a^u.\frac{du}{dx}.Lna$$

مثال 15-3:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = x^2.3^x$

$$\frac{dy}{dx} = x^2.3^x Ln3 + 3^x.2x$$

2. $y = xLnx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + Lnx.1 = 1 + Lnx$

3. $y = Ln\,(secx + tanx)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\sec x + \tan x)}.(\sec x \tan x + \sec^2 x)$$

4. $y = e^{\sin 3x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\sin 3x}.\cos 3x.3$

5. $y = x^2 e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2.e^x + e^x.2x = e^x(x^2 + 2x)$

3.7 التفاضل الضمني Implicit derivative:

في بعض الاحيان تعطي x، y مشتركة في نفس الحد بحيث لا يمكن فصل احدهما عن الاخر، فنجد اشتقاق كل حد في نفس موقعه وفقا للقوانين الخاصة بالتفاضل مع اضافة $\frac{dy}{dx}$ الى كل حد نشتق فيه y، ثم نفرز الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ في طرف من المعادلة والحدود الخالية منها في طرف المعادلة الاخر ثم يستخرج $\frac{dy}{dx}$ كعامل مشترك ومنه نجد $\frac{dy}{dx}$ فقط.

مثال16-3:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية:

1. $16x^2-9y^2 = 144$

$$32x - 18y.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$32x = 18y.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{32}{18}\frac{x}{y} = \frac{16}{9}\frac{x}{y}$$

2. $x^3 + 2xy+y^3=5$

$$3x^2 + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2x+3y) = -3x^2 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 2y}{2x + 3y}$$

3. $16x^4 + y^4 =32$

$$64x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$64x^3 = -4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{64x^3}{4y^3} = -16\frac{x^3}{y^3}$$

4. $x^3+4y^3-xy^2+7x = 0$

$$3x^2 + 12y^2 . \frac{dy}{dx} - x.2y\frac{dy}{dx} - y^2 + 7 = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(12y^2 . - 2xy\right) = y^2 - 3x^2 - 7$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2 - 7}{12y^2 - 2xy}$$

5. $y^2 + \sqrt{xy} = 3x^3$

$$2y + \frac{1}{2}(xy)^{-1/2} . \left(x\frac{dy}{dx} + 1\right) = 9x^2$$

$$2y + \frac{x}{2\sqrt{xy}}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{xy}} = 9x^2$$

$$\frac{x}{2\sqrt{xy}}\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 2y - \frac{1}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(9x^2 - 2y - \frac{1}{2\sqrt{xy}}\right)2\sqrt{xy}}{x}$$

6. x cos y = sin (x + y)

$$-x\sin y.\frac{dy}{dx}+\cos y=\cos(x+y).\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\cos y-\cos(x+y)=x\sin y\frac{dy}{dx}+\cos(x+y)\frac{dy}{dx}$$

$$\cos y-\cos(x+y)=\frac{dy}{dx}[x\sin y+\cos(x+y)]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos y-\cos(x+y)}{x\sin y+\cos(x+y)}$$

7. cos 3 y = tan 2x

$$-\sin 3y.3\frac{dy}{dx}=\sec^2 2x.2$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sec^2 2x}{3\sin 3y}$$

3-8 الاشتقاقات العليا Higher derivative

تسمى عمليةاشتقاق الدالة الاصلية n من المرات بالتفاضل المتتابع او المتتالي، فمشتقة الدالة الاصلية تسمى بالمشتقة الاولى او مشتقة من الرتبة الاولى ويرمز لها بـ y' او $\frac{dy}{dx}$ والمشتقة من المشتقة الاولى تسمى بالمشتقة الثانية او المشتقة من الرتبة الثانية ويرمز لها بـ y'' او $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، والمشتقة من

المشتقة الثانية تسمى بالمشتقة الثالثة او المشتقة من الرتبة الثالثة ويرمز لها بـ

y''' او $\frac{d^3y}{dx^3}$ .... وهكذا . فاذا كانت y=f(x) فان

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

$$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x)$$

.

.

$$\frac{d(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

مثال 17-3

اذا كانت $y=\sin 5x+4x^2$ اوجد $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 5x.5 + 8x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 25(-\sin 5x) + 8$$

$$y'' = -25\sin 5x + 8$$

$$y''' = -75\cos 5x$$

مثال 18-3

اذا كانت $y = e^x \sin 3x + 1$ اوجد y''', y'', y'

$$y' = e^x \cos 3x.3 + \sin 3x.e^x$$
$$y'' = 3[e^x.(-\sin 3x).3 + \cos x.e^x] + \sin 3x.e^x + e^x \cos 3x.3$$
$$y'' = -8e^x \sin 3x + 6e^x \cos 3x$$
$$y''' = -8(e^x \cos 3x.3 + \sin 3x.e^x) + 6(e^x.-\sin 3x.3 + \cos 3x.e^x)$$
$$y''' = -18e^x \cos 3x - 26e^x \sin 3x$$

3.9 تطبيقات التفاضل

هناك العديد من التطبيقات على المشتقات ندرج في ادناه اهمها :

1. الدوال المتزايدة والمتناقصة Increasing & decreasing function

لو كانت لدينا الدالة y= f(x) معرفة على الفترة I فان

أ. ان الدالة f تكون متزايدة عند الفترة I اذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ لجميع قيم $x_1, x_2 \in I$ او عندما $f'(x) > 0$ عند اي نقطة في الفترة I .

ب. وتكون الدالة f متناقصة عند الفترة I عندما $x_1 < x_2$ او عندما $f'(x) < 0$ عند اي نقطة في الفترة I .

مثال 19-3

اوجد الفترة التي تكون فيها الدالة التالية متزايدة ومتناقصة

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$
$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$f'(x) > 0$$
$$(x-3)(x-1) > 0$$

اي ان الدالة موجبة (متزايدة) في الفترتين $(-\infty,1)$ و $(3,\infty)$ وسالبة (متناقصة) في الفترة $(1,3)$.

مثال 20-3

اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة

$$f(x)=3x^4-4x^3-1$$
$$f'(x)=12x^3-12x^2$$
$$f'(x)=12x^2(x-1)$$

اي ان الدالة متزايدة للفترة $(1,\infty)$ ومتناقصة للفترة $(-\infty,1)$.

3-9-1 القيم العظمى والصغرى

Maximum and Minimum values

ان الدالة f(x) لها قيمة نهاية عظمى مطلقة عند x=a اذا كان $f(a)\geq f(x)$ علماً بان $x\in A$ وان A يمثل منطلق الدالة ، وان الدالة لها قيمة نهاية صغرى مطلقة عند x=b عندما $f(b)\leq f(x)$.

تعريف: اذا كان العدد c ضمن منطلق الدالة f وكان $f'(c)=0$ او ان $f'(c)$ غير معرفة فان c تسمى بالقيمة الحرجة (critical value) للدالة f.

اذا كانت x=a قيمة حرجة للدالة y=f(x) فاذا :

أ. تغيرت اشارة $f'(a)$ من الموجب الى السالب فان f(a) تمثل قيمة عظمى موضعية (relative)

ب. تغيرت اشارة $f'(a)$ من السالب الى الموجب فان f(a) تمثل قيمة صغرى موضعية .

جـ. لم تتغير اشارة $f'(a)$ فان f(a) ليست عظمى ولا صغرى .

مثال 21-3

حدد النقاط الصغرى والعظمى للدالة

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$$
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$
$$f'(x) = 12x^2(x-1)$$

0 1

+++++|++++++|+++++ $X^2=0$

-----|------| +++++ X=1

------|------|+++++

عندما x=0 فان $f'(x)$ لم تتغير اشارتها فان f(0) ليست عظمى ولا صغرى .

عندما x=1 فان $f'(x)$ تغيرت من السالب الى الموجب فان f(1) هي قيمة صغرى موضعية .

مثال 3-22

اوجد النقاط الحرجة وحدد النقاط العظمى والصغرى للدالة

1

$----|-----|+++++ \quad -1+\sqrt{3}$

$----|+++++|+++++ \quad -1-\sqrt{3}$

$++++|-----|+++++$

ان $f(-1-\sqrt{3})$ هي قيمة عظمى موضعية .

وان $f(-1+\sqrt{3})$ هي قيمة صغرى موضعية .

ملاحظة (1) لايجاد القيمة العظمى المطلقة (absolute maximum) والقيمة الصغرى المطلقة ، وذلك بايجاد القيم الحرجة للدالة f المستمرة للفترة [a,b] ثم نجد f(a) و f(b) ، فان اكبر قيمة تمثل القيمة العظمى المطلقة واصغر قيمة تمثل القيمة الصغرى المطلقة .

مثال 3-23

اوجد نقاط النهايات المطلقة للدالة f(x) التالية عند [0,2]

فعندما x=1 فان f(1)=-6 وعليه فالقيمة نهاية صغرى مطلقة . وان f(2)=5 فالقيمة في نهاية عظمى مطلقة .

ملاحظة (2) يمكن استخدام المشتقة الثانية للدالة لايجاد نقاط النهايات العظمى والصغرى وكما يلي

اذا كانت لدينا الدالة f(x) وكانت $f'(x)$ و $f''(x)$ موجودة للفترة (a,b) التي تحوي x=c وان $f'(c)=0$ فان :

أ. اذا كانت $f''(c)<0$ فان f(c) هي قيمة عظمى للدالة.

ب. اذا كانت $f''(c)>0$ فان f(c) هي قيمة صغرى للدالة .

مثال 3-24

اوجد نقاط النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$f(x)=x^3+3x^2-2$$
$$f'(x)=3x^2+6 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0$$
$$3x(x+2)=0$$
$$f''(x)=6x+6 \Rightarrow f''(0)=6>0$$
$$f''(-2)=-6<0$$

وعليه فان الدالة في نهاية صغرى عند x=0 وفي نهاية عظمى عند

.x=-2

3-9-2 فترات التقعر للدالة

لنفرض ان f دالة ولها مشتقة ضمن الفترة I ، فان منحني الدالة مقعر للاعلى اذا كان ميل (slope) الدالة $f'(x)$ يزداد دائماً في تلك الفترة. وان منحني الدالة مقعر نحو الاسفل اذا كان ميل الدالة متناقصفي تلك الفترة. او اذا كانت $f''(x) > 0$ لاي قيمة من $x \in I$ فان f مقعرة نحو الاعلى للفترة I، واذا كانت $f''(x) < 0$ فان f مقعرة نحو الاسفل للفترة I.

مثال 25-3 اوجد فترات التقعر للدالة

$$f(x) = 2x^3 - 5$$
$$f'(x) = 6x^2$$
$$f''(x) = 12x$$
$$a) 12x > 0 \Rightarrow x > 0 \rightarrow f''(x) > 0$$
$$b) 12x < 0 \Rightarrow x < 0 \rightarrow f''(x) < 0$$

وعلية فان الدالة مقعرة للاعلى عندما x>0، وتكون الدالة مقعرة للاسفل عندما x<0 .

3.9.3 نقاط الانقلاب Inflection points

ان نقطة الانقلاب هي النقطة التي يتحول عندها منحني الدالـة مـن التقعر للاعلى الى التقعر للاسفل والعكس صحيح، كما انها النقطة للدالـة f التي يتحول عندها اشارة المشتقة الثانيـة f'' فـاذا كانـت x_0 هـي نقطـة انقلاب للدالة f، اذن $f''(x_0)=0$ وكذلك $f'''(x_0)\neq 0$.

مثال 26-3 اوجد نقاط النهايات ونقطة الانقلاب للدالة

$$y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2$$
$$y'=x^2-4x+3=x^2-4x+3\Rightarrow(x-3)(x-1)=0$$
$$y''=2x-4$$
$$y=\frac{1}{3}(3)^3-2(3)^2+3(3)+2=2\Rightarrow p_1(3,2)$$
$$y=\frac{1}{3}(1)^3-2(1)^2+3(1)+2=\frac{10}{3}\Rightarrow p_2(1,\frac{10}{3})$$
$$y'=(2)^2-4(2)+3=-1$$
$$y'=4^2-4(4)+3=3$$

من خلال الخطوات السابقة نجد ان اشارة المشتقة الاولى تغيرت من السالب الى الموجب عندما اخذناقيم اقل واكبر من x=3 فالنقطة p_1 نهايـة صغرى ،وبنفس الاسلوب عند اختبار p_2 فان اشارة المـشتقة الاولى مـن موجب الى سالب عند التعويض عن قيم اقل واكـبر مـن x=1 وعليـه فان p_2 نقطة نهاية عظمى . ولايجاد نقطة الانقلاب فان

$$y'' = 2x - 4$$
$$y'' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$
$$y = \frac{1}{3}2^3 - 2(2)^2 + 3(2) + 2 = \frac{8}{3}$$

وعليه فالنقطة $p_3(2,\frac{8}{3})$ هي نقطة انقلاب .

3.10 الاستمرارية Continuity

لتكن f دالة وليكن a عدداً حقيقياً .يقال ان f مستمرة عند النقطة a اذا وفقط اذا كان :

أ. f معرفة عند النقطة a اي ان f(a) عدد حقيقي .

ب. الغاية $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة، اي ان قيمة الغاية عدد حقيقي .

جـ. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ اي ان قيمة الغاية تساوي قيمة الدالة عند النقطة a .

مثال 3-27

الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ اذ ان $x \neq 1$ ليست مستمرة عند النقطة x=1 لانها غير معرفة عند x=1 وان غاية هذه الدالة موجودة عندما $x \rightarrow 1$ وتساوي 2 .

مثال 28-3

بين هل ان الدالة الاتية مستمرة ام لا

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}\rightarrow x<1\\ x^2+1\rightarrow x\geq 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2+1=2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

$$f(x)=1^2+1=2$$

فتكون الدالة مستمرة عند النقطة 1 لان $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

3.11 التفاضل الجزئي partial differentiation:

لتكن $z=f(x,y)$ دالة في المتغيرين المستقلين y,x فانه يمكن ان

أ) نجعل x تتغير ونترك y ثابتة اوان

ب) نجعل y تتغير ونترك x ثابتة او ان

ج) نجعل y,x ان تتغيرا في ان واحد

وفي كاتا الحالتين أوب تكون z في الواقع دالة لمتغير واحد ويمكن اشتقاقها استناداً الى القواعد المعتادة .

واذا تغير x مـع بقـاء y ثابتـة فعندئـذ تكـون z دالـة في x ومـشتقتها بالنسبة الى x هي :

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

وتسمى بالمشتقة الجزئية الاولى الى z بالنسبة الى x.

اما اذا تغيرت y مع بقاء x ثابتة فان z دالة في y ومشتقتها بالنسبة الى y هي:

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

وتسمى بالمشتقة الجزئية الاولى الىz بالبسبة الى y.

كما يمكن اشتقاق $\frac{\partial z}{\partial x}$ جزئياً بالنسبة الى x وبالنـسبة الى y فنحـصل عـــلى المـــشتقات الجزئيـــة الثانيـــة $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ كـما يمكـن الحـصول عـلى $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ مـع ملاحظـة ان $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ والتي تسمى بالتفاضلات الجزئية ذات الرتب العليا .

مثال 29-3:

اوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ لكل من الدوال التالية:

1. $f(x,y) = z = 100 - x^2 - y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2$$

2. $z = f(x,y) = (2+xy)\cos y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2+xy).-\sin y + \cos y.x$$

$$= -(2+xy)\sin y + x\cos y$$

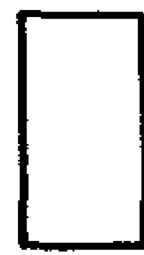
3. $z = \sin(x+2y) - \cos(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x+2y) + \sin(x^2+y^2)2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x+2y).2 + \sin(x^2+y^2)2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\sin(x+2y).2 + 2x\cos(x^2+y^2)2y$$

3-10-1 تطبيقات التفاضل الجزئي.



ان من اهم تطبيقات التفاضل الجزئي هو القيم العظمى والصغرى لدوال في متغيرين مستقلين ، وفيما يلي توضيح الطريقة .

لو اردنا ايجاد اعلى نقطة واسفل نقطة على سطح املس ممثل بالمعادلة $z= f(x,y)$ اذ ان z معرفة ومستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة الى x و y في منطقة ما في المستوي xy ومثلا (a,b) بحيث ان $f(x,y) \geq f(a,b)$ فيقال ان الدالة f لها قيمة صغرى محلية في النقطة (a,b) . اما اذا كانت المتراجحة $f(x,y) \leq f(a,b)$ فيقال ان الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة في النقطة (a,b) واذا فرضنا ان $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ كلاهما موجود في (a,b) فان الشرط اللازم الذي يجب ان يتحقق هو :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

مثال 30-3

اوجد النقط العليا والسفلى على السطح

$$Z=f(x,y)= x^2+y^2+2x+2y-4$$

وبتطبيق الشرط $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ نحصل على المعادلتين الاتيتين :

$$2x-y=-2 \quad ....1$$

$$-x+2y=-2 \quad ....2$$

وعند حل المعادلتين انيا نجد ان x = y =2 . وبذلك تكون النقطة (-2,-2) هي النقطة المشار اليها (a,b) وان f(-2,-2)=-8 ولاختبار سلوك الفرق D=f(x,y)-f(-2,-2) نضع x=-2+h وكذلك

فان Y=-2+k

وان الفرق هو موجب لجميع قيم

$$D = f(-2+h,-2+k) - f(-2,-2)$$

$$D = h^2 - hk + k^2 = (h - \frac{k}{2})^2 + \frac{3k^3}{4} \text{ h}$$

و k ماعدا h=k=0 اي ان

$$f(x,y) \geq f(-2,-2)$$

اي ان السطح له نقطة دنيا في (-2,-2,-8) ويكون للدالة قيمة صغرى مطلقة (-8) .

تمارين الفصل الثالث

1. اوجد غايات كل من الدوال التالية:

a. $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^3 - 2x^2 + 1\right)$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 3}{x^2 - 5}$

c. $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x^2 - 3x + 6}$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x^2 + 1} - 6x\right)$

e. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^2 + 3x + 2}$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$

g. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[7]{x + 2} - \sqrt{2}}$

h. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 5x^2 + 4x + 4}$

2. اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

a. $f(x) = y = x^3 - 2x - 5$

b. $y = (x^3 + 1)(2x^2 + 8x - 5)$

c. $y = \sqrt{3x^2 + 8x + 6}$

d. $y = (x + 1)(x^2 - 1)(2x + 3)$

e. $y = \left(\frac{6x^2 - 8 + 4x}{4x^2 + 9}\right)^{10}$

f. $y = \frac{x}{7} - \frac{7}{x}$

g. $y = \frac{1}{\sqrt{(4x^2 + 5x)^3}}$

h. $y = \left(\frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}}\right)^{5/2}$

3. اوجد لكل من $\frac{dy}{dx}$ الدوال التالية:

a. $y = 2z^3 - \frac{1}{z} \qquad , z = \left[\frac{x}{(x-1)^4}\right]^2$

b. $\sqrt{xy} - 3y^2 + 5x = 9$

c. $xy = \sqrt{x^2 + y^2}$

d. $(2x+3)^4 = 3y^4$

e. $y = \sqrt{u}, u = \sqrt{3-2v}, v = x^2$

f. $y = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}$

g. $y = \sec^2 \sqrt{x^2 - 2}$

h. $x \cos y = \sin(x + 2y)$

i. $y = 3^{-x^2}$

j. $y = x^x$

k. $y = x^2 e^{2x} \cos 3x$

l. $y = \log_2(x^2 + 2x)$

m. $y = \text{Ln}\,(\text{Ln}\, x)$

4. اذا كان $y = e^{-2x} (\sin 2x + \cos 2x)$ بين ان

$y'' + 4y' + 8y = 0$

5. اوجد $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

a. $f(x,y)=\cos(3y-5)+x\sec\left(x^2+y^2\right)$

b. $f(x,y)=e^{y-\frac{1}{x}}+3^{\mathrm{Ln}(x+y)}$

c. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\cos y}-\frac{1}{\sqrt{1-\sin xy}}$

6. اذا كان $xy=1$ اوجد y''', y'', y'

7. اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

a. $y=3\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{3}$

b. $y=\frac{\tan x+\sin x}{\cos x}$

c. $x^2=\sin 2xy+\sin y$

d. $x+\tan(xy)=0$

e. $y=\tan^2(\cos x)$

f. $y=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

8. هل ان الغاية للدالة f(x) موجودة

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2 & x\le 2 \\ 3x & x>2 \end{Bmatrix}$$

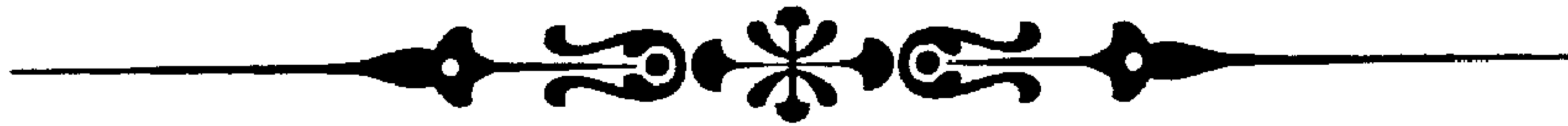
9. جد النقاط التي تكون الدالتين التاليتين غير مستمرة عندها

$$a)\, f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}$$

$$b)\, f(x)=\frac{x-2}{x^2-3x+2}$$

10. احسب قيمة c لكي تكون الدالة مستمرة عند النقطة x=c

$$f(x)=\begin{Bmatrix} \dfrac{x^2-c^2}{x-c}, x\neq c \\ 1, x=c \end{Bmatrix}$$






الفصل الرابع
التكامـــــل

4-1 التكامل غير المحدود:

4-2 قوانين التكامل

4-3 بعض طرق التكامل

4-4 التكامل المحدود Definite Integrals

التكامل

4.1 التكامل غير المحدود:

اذا كانت F(x) دالة مشتقتها الاولى تساوي f(x) أي [f(x)=f(x)] فانه يقال الدالة F(x) انها تكامل الدالة f(x) . أي ان عملية التكامل هي عكس عملية التفاضل والخطوات المتبعة في التكامل هي الخطوات العكسية للتفاضل. يرمز للتكامل بالرمز $\int f(x)dx$ حيث ان f(x) تسمى بـIntegrand والعملية integration وdx أي التكامل بالنسبة لـx أي ان:

$$F(x)=\int f(x)dx$$

وهذا التكامل يسمى بالتكامل غير المحدود (Infinite integral) ويعتبر تكامل غير وحيد أي انه اذا كان لدينا الدالة f(x)=6x فان:

$$\int f(x)dx = \int 6xdx = 3x^2 + c$$

حيث c ثابت التكامل وذلك لان:

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 5) = \frac{d}{dx}(3x^2 + 10) = \frac{d}{dx}(3x^2) = 2x$$

وهكذا فان التكامل غير المحدود يكون متبوعا بثابت التكامل دائما.

4.2 قوانين التكامل

يطلق على الصيغ الاتية والمستمدة من قوانين المشتقات بصيغ التكامل formulas Integration على اعتبار ان عملية التكامل هي العملية العكسية لعملية الاشتقاق وتدرج فيما يلي بعض هذه الصيغ:

1) $\int \frac{d}{dx}[f(x)]dx = f(x)$

2) $\int [f(x) \mp g(x)]dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$

3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ اذ ان a ثابت

ويمكن توسيع الصيغ السابقة بالشكل الاتي، اذا كانت u دالة x قابلة للتفاضل فان:

4) $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c, m \neq -1$

5) $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$

6) $\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + c, a > 0$

7) $\int e^u du = e^u + c$

8) $\int \sin u du = -\cos u + c$

9) $\int \cos u du = \sin u + c$

10) $\int \sec^2 u du = \tan u + c$

11) $\int \csc^2 u du = -\cot u + c$

12) $\int \sec u \tan u du = \sec u + c$

13) $\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$

مثال 1-4

اوجد ناتج التكاملات التالية:

1) $\int x^4 dx = \frac{x5}{5} + c$

2) $\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

3) $\int 4x^{-3} dx = 4\int x^{-3} dx = 4\frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{2}{x^2} + c$

4) $\int (4x^3 + 3x^2 - x) dx = 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - \int x dx = x^4 + x^3 - \frac{x^2}{2} + c$

5) $\int (x^5 - \frac{1}{x^2} + 2) dx = \int x^5 dx - \int x^{-2} dx + 2\int dx = \frac{x6}{6} - \frac{x^{-1}}{-1} + 2x + c$

6) $\int (3x+8)^4 dx = \frac{1}{3}\int (3x+8)^4 3dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+8)^5}{5} + c$

7) $\int (x^3+1)^3 x^2 dx = \frac{1}{3}\int (x^3+1)^3 3x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{(x^3+1)^4}{4} + c$

8) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx = \int (x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}(x+1)dx$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+2x)^{-\frac{1}{2}} 2(x+1)dx$

$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2+2x} + c$

9) $\int \frac{3x^3+6x}{x} dx = \int \frac{3x^3}{x} dx + \int \frac{6x}{x} dx$

$=3\int x^2 dx + 6\int dx = x^3 + 6x + c$

10) $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x.3dx = \frac{1}{3}(-\cos 3x) + c$

11) $\int x\sec^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 x^2 2x dx = \frac{1}{2}\tan x^2 + c$

12) $\int \frac{\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\sec\sqrt{x} + c$

13) $\int \cos(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+1)3dx = \frac{1}{3}\sin(3x+1) + c$

14) $\int x\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2.2xdx = \frac{1}{2}\sin x^2 + c$

15) $\int \sin^3 4x \cos 4x dx = \int (\sin 4x)^3 \cos 4x dx$

$$= \frac{1}{4}\int (\sin 4x)^3 4\cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(\sin 4x)^4}{4} + c = \frac{1}{16}(\sin 4x)^4 + c$$

16) $\int \sec^3 x \tan x dx = \int \sec^2 x . \sec x \tan x dx = \frac{(\sec x)^3}{3} + c$

17) $\int \tan^3 2x \sec^2 2x dx = \int (\tan 2x)^3 \sec^2 2x dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\tan 2x)^3 2\sec^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{8}(\tan 2x)^4 + c$$

18) $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int e^{5x} 5dx = \frac{1}{5}e^{5x} + c$

19) $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int e^{\sin 2x} 2\cos 2x dx = \frac{1}{2}e^{\sin 2x} + c$

20) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}} dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}} dx - \int \frac{1}{e^{2x}} dx = \int dx - \int e^{-2x} dx$

$$= x - (-\frac{1}{2})\int e^{-2x}(-2dx) = x + \frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

21) $\int 2^{\sin 2x} \cos 2x dx = \frac{1}{2}.\ln 2 \int 2^{\sin 2x} \frac{2\cos 2x}{\ln 2} dx = \frac{\ln 2}{2} 2^{\sin 2x} + c$

22) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int (\ln x)\frac{1}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

4ـ3 بعض طرق التكامل

Method of Integrations Some

تستخدم لتحويل التكاملات غير المالوفة والتي لا يمكن تكاملها بالطرق الاعتيادية الى الصيغة القياسية التي يمكن ان نطبق عليها قوانين التكامل ومن هذه الطرق:

4ـ3ـ1 التكامل بالتجزئة Integration by Parts

هذه الطريقة مشتقة من قاعدة تفاضل حاصل ضرب دالتين

(اذ ان u,v دوال لـ x)

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ويتكامل الطرفين بالنسبة لـ x ينتج

$$\mathrm{uv} = \int udv + \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

وهذا القانون يعبر عن تكامل دالة بتكامل دالة اخرى ابسط منها مثل حاصل ضرب دالة اسية مع دالة جبرية او دالة مثلثية مع دالة جبرية او اسية،او دالة لوغارتمية مع دالة جبرية وهكذا.

ولتطبيق هذه الطريقة يتم اختيار جزء من التكامل ليمثل (u) والقابل

للتفاوض والجزء الاخر dv والقابل للتكامل مباشرة والامثلة الاتية توضح هذه الطريقة .

مثال 2-4

اوجد ناتج كل من التكاملات التالية:

$1)\int \ln x dx \quad 2)\int xe^x dx \quad 3)\int e^x \sin 2x dx \; 4)\int x^2 \cos x dx$

$1)\ \int \ln x dx$

نفرض ان $\ln x = u$ وباشتقاق الطرفين فان

$\frac{1}{x}dx = u$

نفرض ان $dx = dv$ وبتكامل الطرفين فان

$\int dx = \int dv, x = v$

$\int udv = uv - \int vdu$

$\int \ln x dx = \ln x.x - \int x\frac{1}{x}dx = xLnx - x + c$

$2)\int xe^x dx$

نفرض ان x=u فان dx=du ونفرض ان $e^x dx = dv$ فان

اذن $\int e^x dx = \int dv$

$\int xe^x dx = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

$3)\int e^x \sin 2x dx$

نفـرض ان $e^x = u$ فـان $e^x dx = du$ ونفـرض ان sin2xdx=dv اي

$\int dv = \frac{1}{2}\int \sin 2x.2dx$ فان $-\frac{1}{2}\cos 2x = v$ اذن

$$\int e^x \sin 2x = e^x(-\frac{1}{2}\cos 2x) - \int(-\frac{1}{2}\cos 2x)e^x dx = \frac{1}{2}e^x \cos 2x + \int e^x \cos 2x dx$$

وان $\int e^x \cos 2x dx$ لايمكن ايجاده الا بطريقة التجزئة اي:

نفـــــرض ان $e^x = u$ وان $e^x dx = du$ وان $\cos 2x dx = dv$ فـــــان

$\int dv = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$ اي $\frac{1}{2}\sin 2x = v$ اذن .

$$\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}(uv - \int v du) = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}(e^x.\frac{1}{2}\sin 2x - \int\frac{1}{2}\sin 2x e^x dx)$$

$$= -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x$$

$$\int e^x \sin 2x + \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x$$

$$\frac{5}{6}\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x$$

$$\int e^x \sin 2x = \frac{4}{5}(-\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x) + c$$

4) $\int x^2 \cos x dx$

نفرض ان $x^2=u$ فان 2xdx=du ونفرض ان cosxdx=dv اي sinx=v

اذن

$$\int x^2 \cos x dx = uv - \int v du = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx$$

ونستخدم الطريقة مرة ثانية على صيغة التكامل الناتجة مـن الطريقـة الاولى اي

نفرض ان x=u فان dx=du وان sinxdx=dv اي v=-cosx وعليه

فان

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2(uv - \int v du) = x^2 \sin x - 2(-x\cos x - \int -\cos x dx$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

مثال 3-4:

جد ناتج التكامل التالي

$$\int (x^2+1) Lnx dx$$

نفــرض ان u= Lnx فــان $du = \frac{dx}{x}$ وان $dv=(x^2+1)dx$ فــان

$$v = \frac{x^3}{3} + x$$

$$\int (x^2+1) Lnx dx = (\frac{x^3}{3} + x) Lnx - \int (\frac{x^3}{3} + x)\frac{dx}{x}$$
$$= (\frac{x^3}{3} + x) Lnx - \frac{x^3}{9} - x + c$$

4-3-2 التكامل بطريقة الاستعاضة بالنسب المثلثية

Trigonometric Substitutions

تجري تكاملات الدوال من النوع

$$\sqrt{a^2-u^2}, \sqrt{a^2+u^2}, \sqrt{u^2-a^2}, a^2+u^2, a^2-u^2$$

اذ ان a كمية ثابتة وان u هي دالة لـx فيتم التعويض عن u بنسب مثلثية استنادا الى المتطابقات المثلثية الاتية:

$$1-\sin^2 x=\cos^2 x \qquad (1)$$

$$1+\tan^2 x=\sec^2 x \qquad (2)$$

$$\sec^2 x-1=\tan^2 x \qquad (3)$$

وبضرب طرفي هذه المتطابقات في a^2 فان التعويضات المثلثية التالية تؤدي الى

U=a sin x يجعل a^2-u^2 مساويا لـ $a^2\cos^2 x$

U=a tan x يجعل a^2+u^2 مساويا لـ $a^2\sec^2 x$

U=a sec x يجعل u^2-a^2 مساويا لـ $a^2\tan^2 x$

وهكذا ترى ان لكل حالة تعويضا مناسبا يوصلنا الى دالة بسيطة يسهل تكاملها والامثلة الاتية توضح الخطوات:

مثال 4-4 اوجد ناتج التكاملات التالية:

$$1)\ \int\frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}=I_1$$

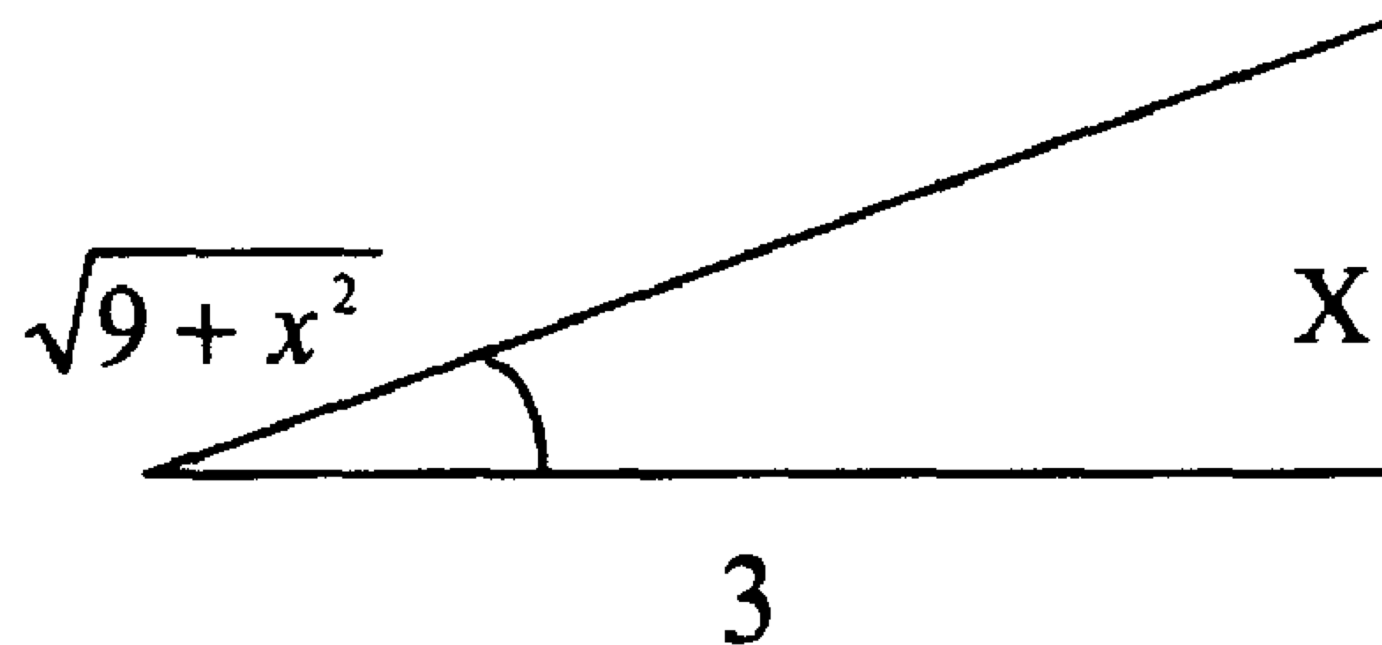
نفرض ان $x=3\tan\theta$ فيكون $dx=3\sec^2\theta\, d\theta$ أي ان

$$I_1=\int\frac{3\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}}=\int\frac{3\sec^2\theta d\theta}{3\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$=\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec\theta}$$

$$=\int\sec\theta d\theta=Ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+c$$

ولتحويل الجواب الى المتغير الاصلي X نرسم مثلث قائم الزاوية



ومن المثلث نجد ان $\tan\theta=\frac{x}{3}$ وان $\sec\theta=\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$

أي ان

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}=L_n\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}+\frac{x}{3}\right|+c$$

2) $\int\sqrt{4-x^2}dx=I_2$

نفرض ان $x=2\sin\theta$ فان $dx=2\cos\theta d\theta$ أي ان

$$I_2 = \int \sqrt{4-4\sin^2\theta}.2\cos\theta d\theta = 4\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta$$

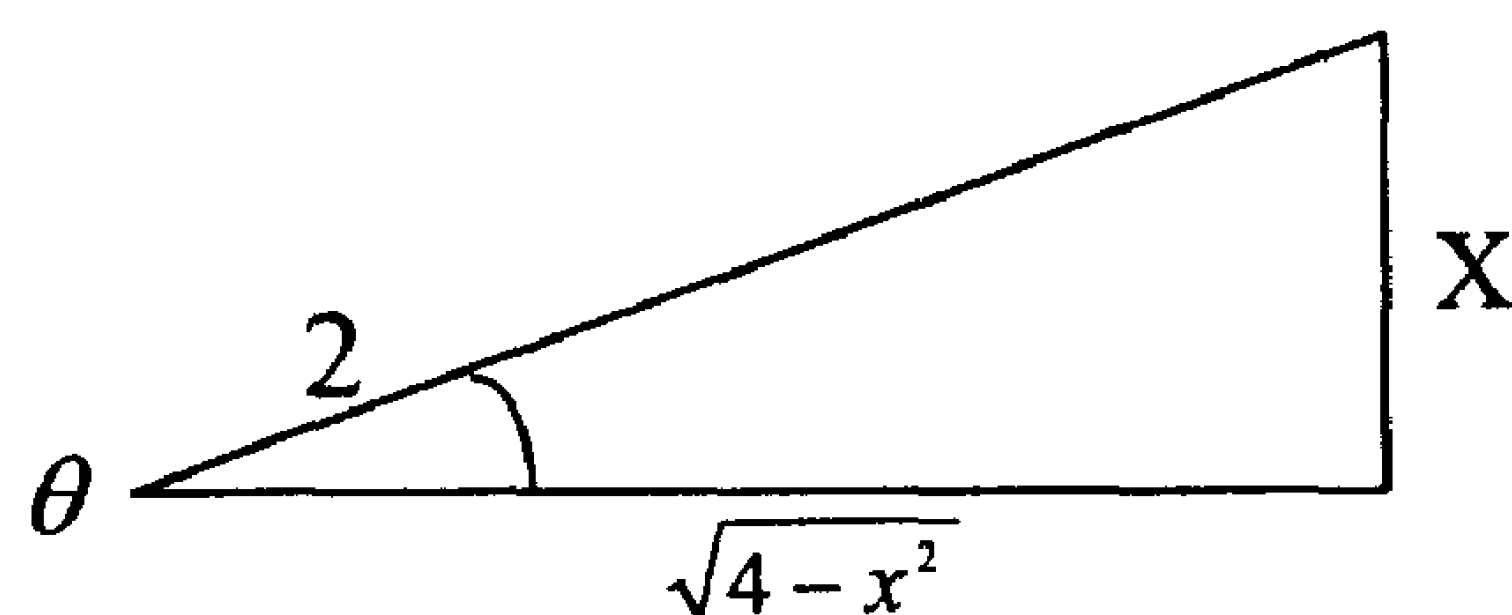
$$= 4\int \cos^2\theta d\theta = \frac{4}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta$$

اذ ان $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

$$= 2\int d\theta + \int \cos 2\theta 2 d\theta$$

$$= 2\theta + \sin 2\theta + c = 2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + c$$

اذ ان $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$



من المثلث السابق نجد ان

$$\sin\theta = \frac{x}{2} \rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{x}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$I_2 = 2\sin^{-1}\frac{x}{2} + 2\frac{x}{2}.\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

أي ان

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\sin^{-1}\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c$$

$$3)\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-4}} = I_3$$

نفرض ان $x-2=2\sec\theta$ فان $dx = 2\sec\theta\tan\theta$

$$I_3 = \int\frac{2\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta-4}} = \int\frac{2\sec\theta\tan\theta d\theta}{2\sqrt{\sec^2\theta-1}}$$

$$= \int\frac{\sec\theta\tan\theta d\theta}{\tan\theta} = \int\sec\theta d\theta$$

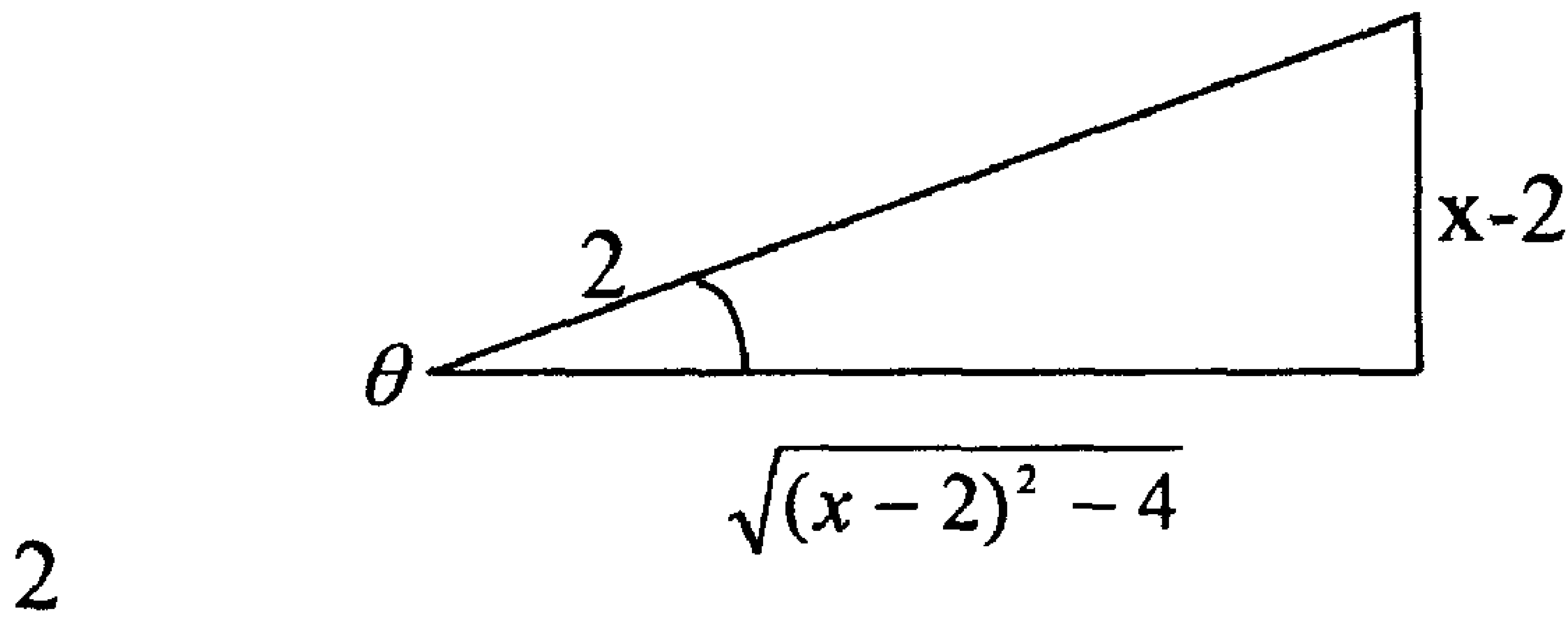
$$= \int\frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta$$

$$= \int\frac{\sec^2\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta$$

ومن الملاحظ ان مشتقة المقام موجود في البسط أي ان

$$= Ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right| + c$$

ولغرض التحويل الى X نرسم المثلث الاتي:



2

$$I_3 = Ln\left|\frac{x-2}{2} + \frac{\sqrt{(x-2)^2-4}}{2}\right| + c$$

4.3.3 طريقة التكامل بالكسور الجزئية

Method of Partial Fractions

عندما تكون الدالة المراد تكاملها نسبية (نسبة بين متعددي حدود) بحيث ان البسط اكبر او مساو للمقام بالدرجة يجب ان تبسط النسبة وذلك بالقسمة العادية لتتحول الى مقدار صحيح مع كسر حقيقي (بسطه اقل من مقامه بالدرجة) ثم تجزأ الكسر الناتج الى كسور اخرى مجموعها الجبري يساوي الكسر الاصلي. وتسمى الكسور البسيطة بالكسور الجزئية (Partial Fractions) وتعتمد التجزئة على قابلية مقام الكسر للتحليل. والامثلة توضح الطريقة

مثال 5-4 اوجد ناتج التكاملات التالية:

$$1)\ \int \frac{dx}{(x-1)(x-3)} = I_1$$

الحل:

$$I_1 = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \right] dx$$

ونجد قيم الثوابت A,B حسب ما يلي:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

أي ان

A(x-3)+B(x-1)=1

Ax-3A+Bx-B=1

X(A+B)-(3A+B)=1

فان معامل X غير موجود في الطرف الايمن أي ان مساوي للصفر

A+B=0 (1)

(2) -3A-B=1 وان الحد الثابت هو (1) أي ان

وبحل المعالدلتين انيا نجد ان

$$-2A=1 \Longrightarrow A=-\frac{1}{2}$$

وبالتعويض فان $B=\frac{1}{2}$ فيصبح التكامل I_1 بالشكل الاتي:

$$I_1 = \int\left[\frac{-1/2}{X-1}+\frac{1/2}{X-3}\right]dx$$

$$= \int\frac{-1/2}{x-1}dx + \int\frac{1/2}{x-3}dx$$

$$I_1 = -\frac{1}{2}Ln(x-1)+\frac{1}{2}Ln(x-3)+c$$

2) $\int\frac{dx}{x(x+1)^2} = I_2$

الحل:

$$I_2 = \int\left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x+1)^2}\right]dx$$

ونجد الثوابت A,B,C كما يلي:

$1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$

$1=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$

$1=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$

الحد الثابت هو (1) ومساوي لـــA أي ان A=1 وان معـاملي x^2 x,

هما صفر أي ان

A+B=0 2A+B+C=0

وبعد حل المعادلات نجد ان

B=-1 , C=-1

اذن

$$I_2=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2}\right]dx = Lnx-Ln(x+1)-\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c$$

$$I_2=Lnx-Ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+c \quad =Ln(\frac{x}{x+1})+\frac{1}{x+1}+c$$

$$3)\ \int\frac{3-x}{x^3-x^2+x-1}dx=I_3$$

$$I_3=\int\frac{3-x}{x^2(x-1)+(x-1)}dx=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$=\int\left[\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+c}{x^2+1}\right]dx$$

مع ملاحظة ان الجزء الثاني للكسر (x^2+1) هو من الدرجة الثانية لذلك نضع Bx+c

$3-x=A(x^2+1)+(Bx+c)(x-1)$

$3-x=Ax^2+A+Bx^2-Bx+cx-c$

$3-x=(A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)$

A-c=3 (1)

A+B=0 (2)

-B+c=-1 (3)

وبعد حل المعادلات الثلاث انيا نحصل على

A=1 , B=-1 ,C=-2

$$I_3 = \int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{-x-2}{x^2+1}dx$$

$$= Ln(x-1) - \int\frac{xdx}{x^2+1} - 2\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$I_3 = Ln(x-1) - \frac{1}{2}Ln(x^2+1) - 2\tan^{-1}x + c$$

4) $\int\frac{x^3-4x^2-x}{x^2-6x+5}dx = I_4$

لما كان البسط اعلى درجة من المقام،نقسم البسط على المقـام بالقـسمة الطويلة ليكون الباقي اقل درجة من المقام ثم نبدأ بالتجزئة وكالاتي:

$$I_4 = \int(x+2+\frac{6x-10}{x^2+6x+5})dx$$

$$\frac{6x-10}{x^2+6x+5} = \frac{6x-10}{(x-5)(x-1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1}$$

6x-10=A(x-1)+B(x-5)=Ax-A+Bx-5B

6x-10=(A+B)x+(-A-5B)

A+B=6 (1)

-A-5B=-10 (2)

وبحل المعادلتين انيا نحصل على:

B=1 ,A=5

$$I_3 = \int (x + 2 + \frac{5}{x-5} + \frac{1}{x-1})dx$$

اذن

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 5Ln(x-5) + Ln(x-1) + c$$

4.4 التكامل المحدود Definite Integrals

اذا كانت f(x) اية دالة مستمرة اكبر من الصفر بين x=a وx=b وكانت f(x) اية دالة مشتقتها تساوي f(x) فان المسافة الواقعة تحت المنحنى وبين a,b هي f(b)-f(a) وهذا التعبير يسمى بالتكامل المحدود للدالة f(x) من a الى b ويعبر عنه كما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a) ...(4-1)$$

مع ملاحظة عدم وجود ثابت التكامل في التكامل المحدود.

وللتكامل المحدود تطبيقات عديدة منها:

4.4.1 تطبيقات التكامل المحدود

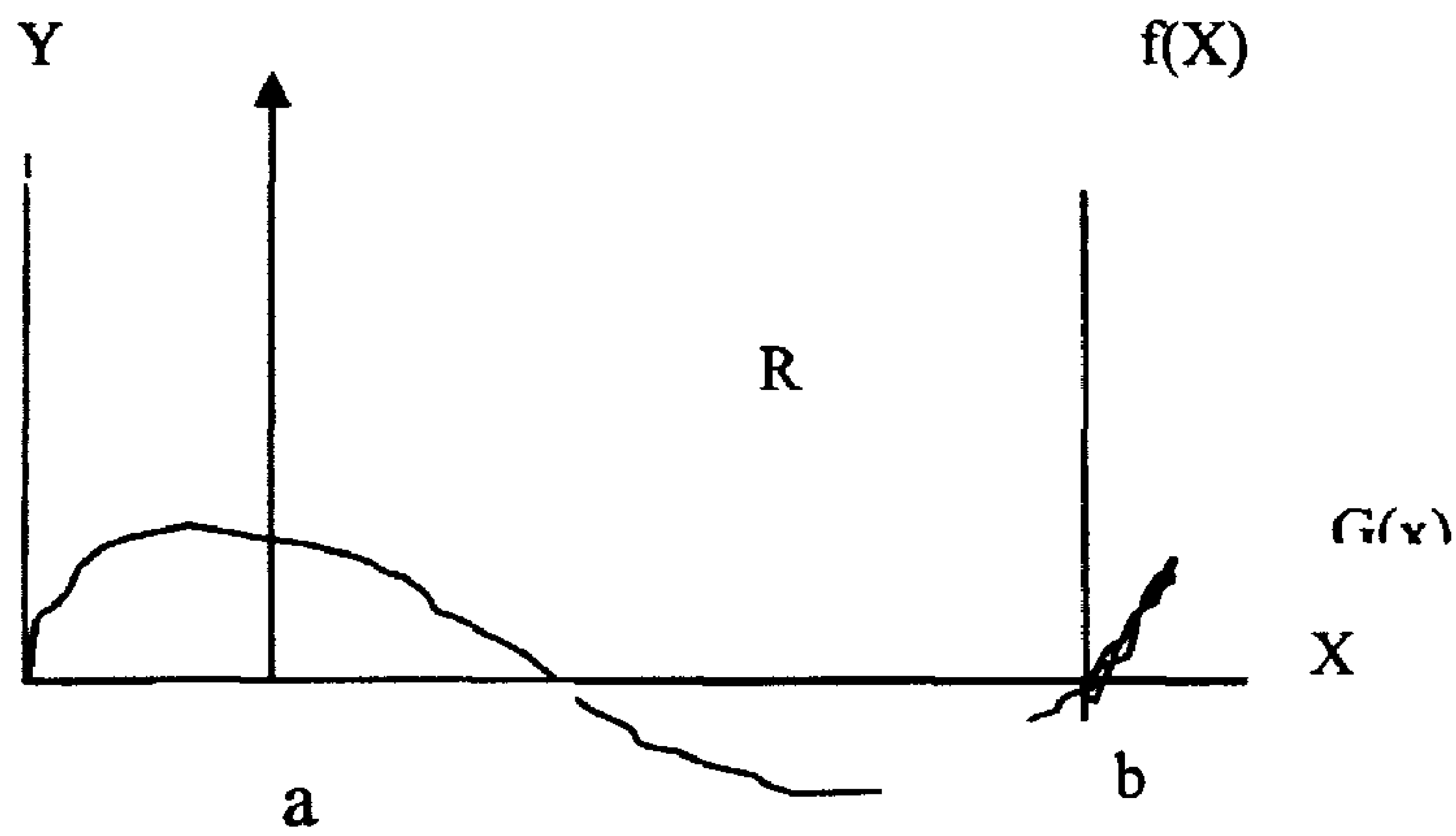
هناك تطبيقات عديدة للتكامل المحدود فهو يستعمل في ايجاد مساحة منطقة بين مخططين وايجاد حجوم الاجسام الدورانية ، والمساحات السطحية للاجسام الدورانية وايجاد المسافة المقطوعة لجسم يتحرك بتعجيل وغيرها. وفيما يلي بعض التطبيقات:

4-4-1-1 المساحة بين منحنيين

اذا كانت g,f دالتين مستمرتين للفترة المغلقة [a,b] بحيث ان $f(x) \geq g(x)$ ونرغب في ايجاد مساحة المقطع R فاننا نجزء الفترة [a,b] الى n من الفترات الجزئية المتساوية بطول $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ وتكون لكل فترة جزئية عرض Δx بارتفاع $[f(c_1)-g(c_1)]$ اذ ان c_1 يقع في الفترة الجزئية ، عندئذ تكون مساحات هذه المستطيلات هو المجموع الاتي:

$$\sum_{i=1}^{n}[f(c_i)-g(c_i)]$$

الذي يمثل قيمة تقريبية لمساحة المنطقة R حسب الشكل الاتي:



مثال 6-4

اوجد المساحة تحت المنحنى $y=x^2+3x+1$ بين $x=5,x=2$

الحل

$$A=\int_2^5 (x^2+3x+1)dx = \frac{x3}{3}+\frac{3x2}{2}+x\Big|_2^5$$

$$=\left(\frac{5^3}{3}+\frac{3(5)^2}{2}+5\right)-\left(\frac{2^3}{3}+\frac{32^2}{2}+2\right)=73.5$$

مثال 7-4

اوجد المساحة المحصورة تحت المنحنى $y=x^2$ ومحور x من $x=1$ الى $x=3$

$$A=\int_{1}^{3} x^{2}dx=\frac{-x3}{3}\bigg|_{1}^{3}=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

مثال 8-4

اوجد المساحة الواقعة فوق المحور السيني وتحت القطع المكافئ $y=4x-x^{2}$

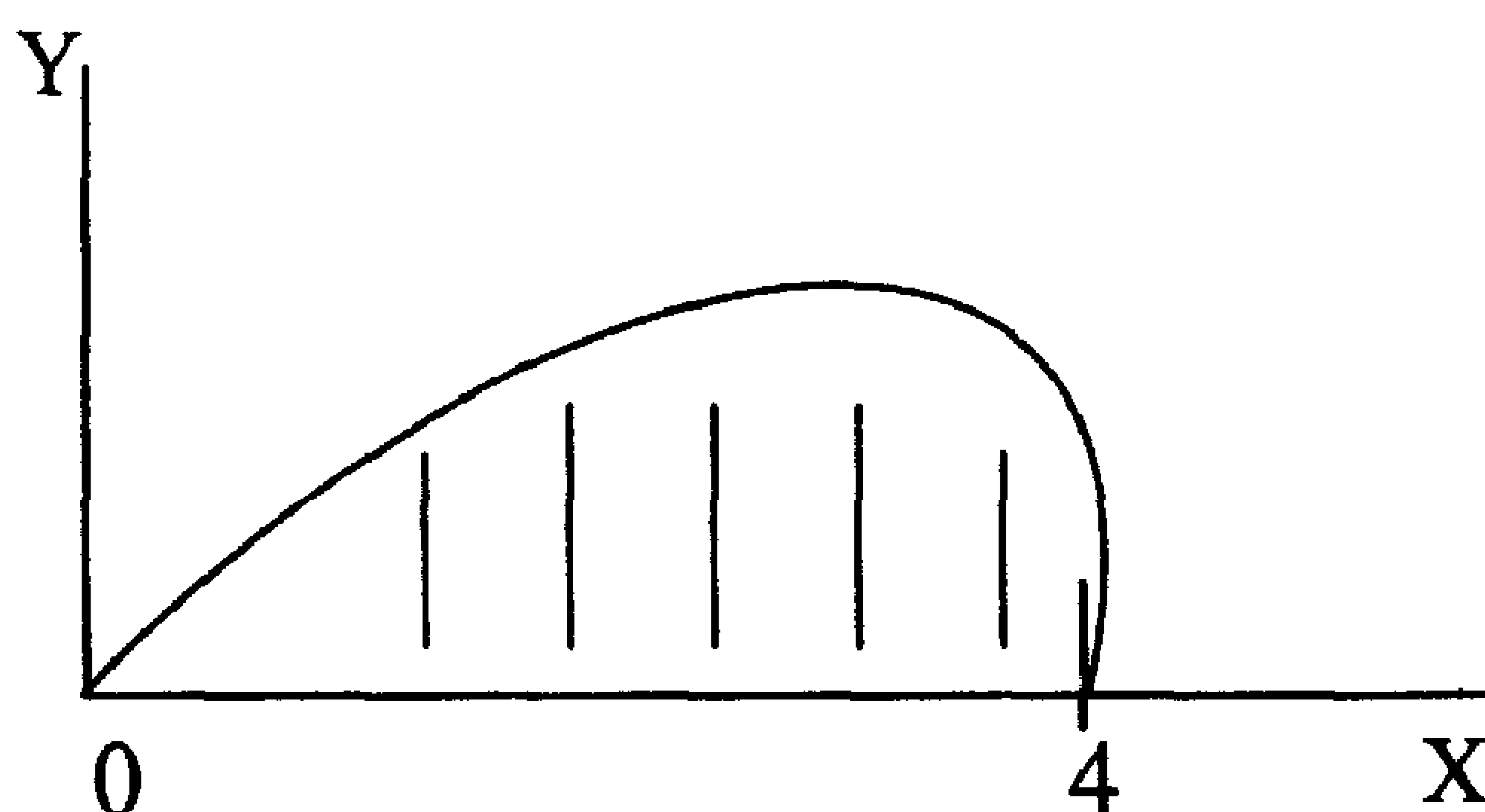
الحل:

ان المنحنى $y=4x-x^{2}$ يقطع احداثي x غند النقطتين

$$x(4-x)=0 \Longrightarrow x=0\ ,\ x=4$$

فان

$$A=\int_{0}^{4}(4x-x^{2})dx=2x^{2}-\frac{x3}{3}\bigg|_{0}^{4}=\frac{32}{3}$$



ملاحظة: اذا كانت المساحة المطلوبة واقعة تحت المحور السيني فان الناتج مسبوقا بعلاقة السالب واذا كان المطلوب مجموع المساحات بين

المنحني والمحور السيني وكان بعضها فوق المحور السيني والاخر تحته فاننا نجمع القيم المطلقة للمساحات في مثل هذه الحالات.

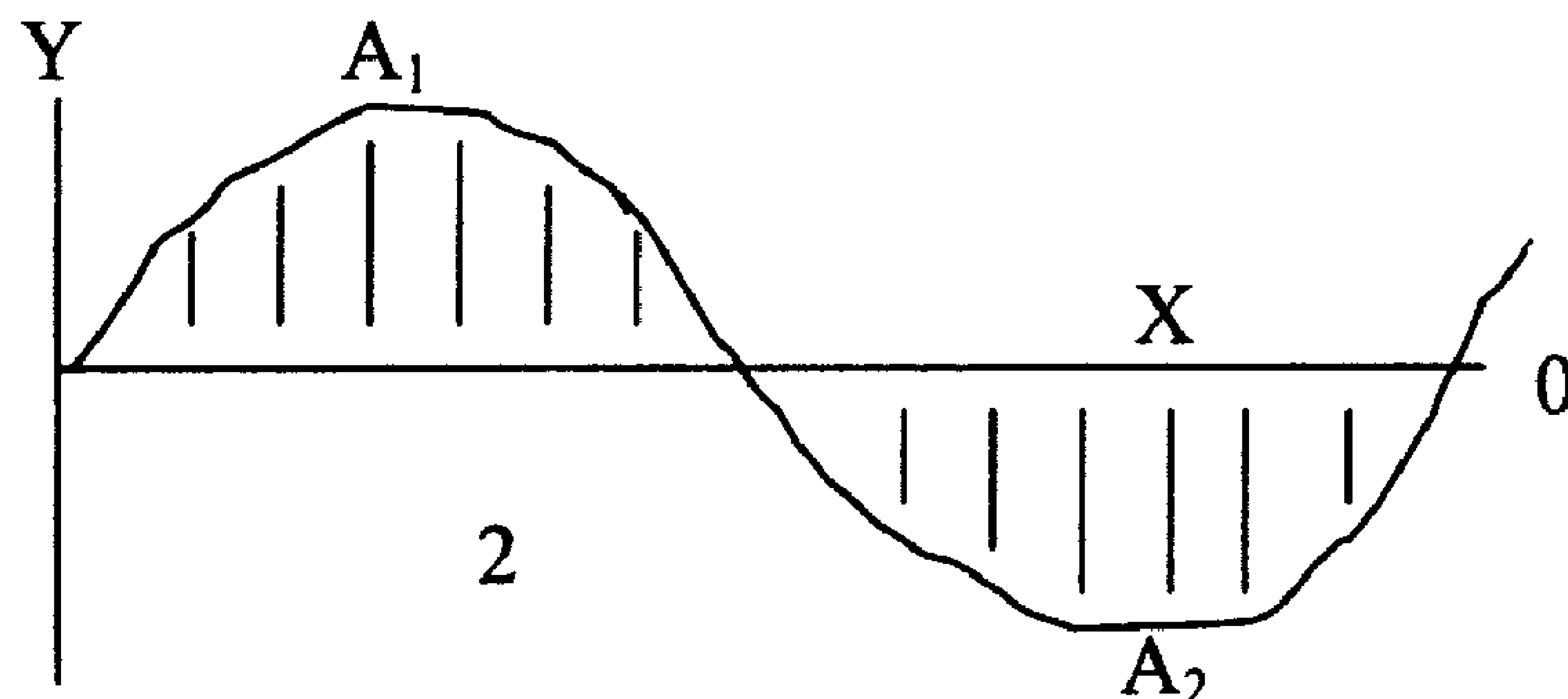
مثال 9-4

اوجد المساحة المحصورة بين المحور السيني والمنحنى $+8x^2$ -$6x^3$ y=x

الحل: ان المنحني يقطع الاحداثي السيني في النقاط

$$y=x^3-6x^2+8x=x(x-2)(x-4) \longrightarrow \quad x=0,x=2,x=4$$

وعند رسم المنحني نجد ان هناك مساحتين وكما يلي



$$A_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx = \frac{x4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \Big|_0^2$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - 2(2)^3 + 8(2) \right] - 0 = 4 - 16 + 16 = 4$$

$$A_2 = \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx = \frac{x4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \Big|_2^4$$

$$= \left(\frac{4^4}{4} - 24^3 + 4(4)^2 \right) - 4 = 0 - 4 = -4$$

$$A = |A_1| + |A_2| = 4 + 4 = 8$$

وحدة مربعة

مثال 10-4

اوجــد المــساحة المحــصورة بــين x=3,x=0 وبــين المنحنيــين $y_1 = 3x - x^2 , y_2 = 3x^2 - x^3$

الحل:

نجـد المنحنيـين يتقاطعـان عنـد النقـاط (0,0)،(1,2)،(3,0) عنـد حلهما انيا أي

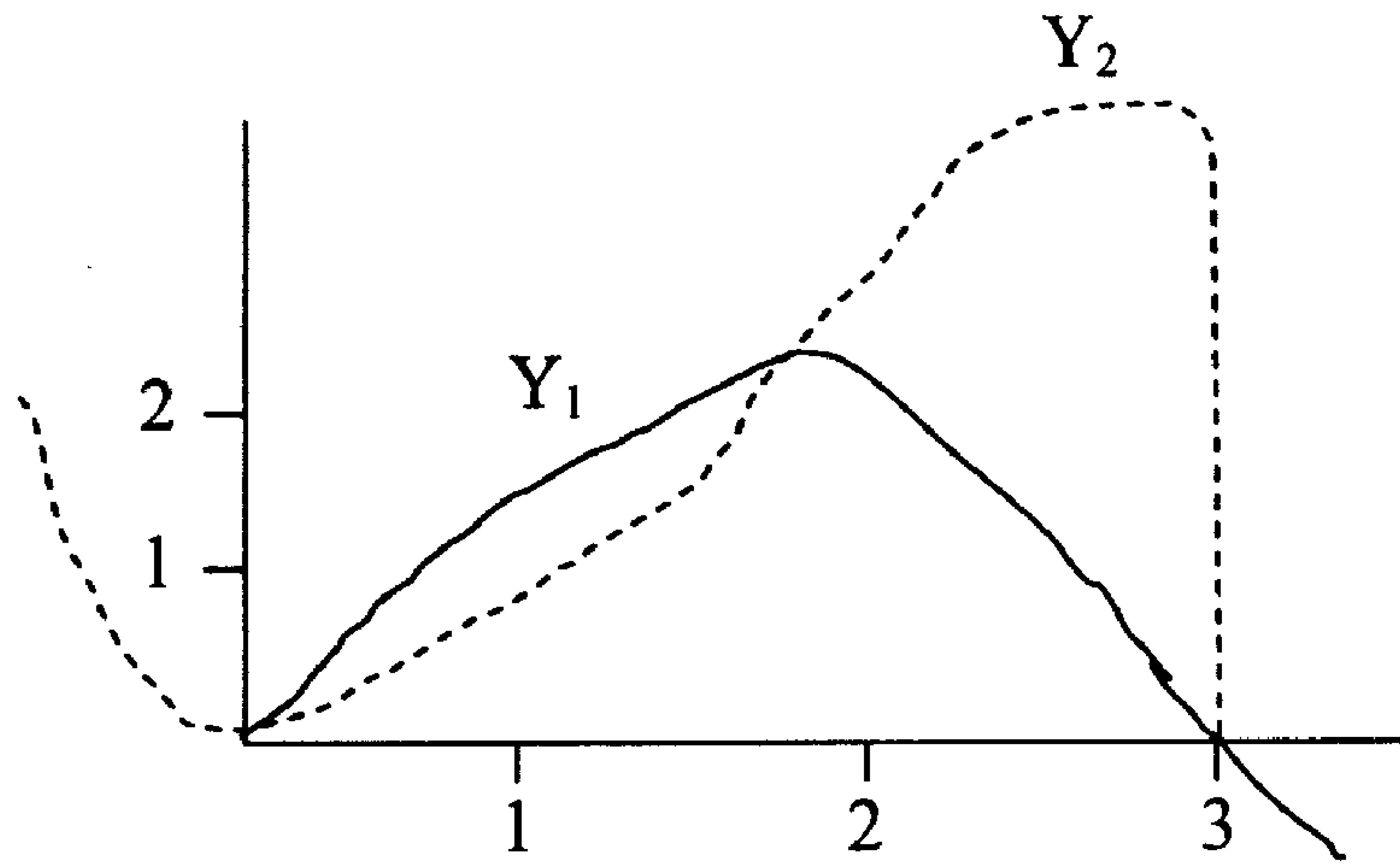
$$y_1 = y_2 \rightarrow 3x - x^2 = 3x^2 - x^3$$

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$x(x \quad - 4x + 3) = 0$$

$$x(x-1)(x-3)=0 \rightarrow x=0,x=1,x=3$$

وعند رسم المنحنيين يكون $y_1 > y_2$ وكما يلي:



$$A = \int_0^1 (y_1 - y_2)dx + \int_1^3 (y_2 - y_1)dx$$

$$= \int_0^1 (3x - 4x^2 + x^3)dx + \int_1^3 (4x^2 - x^3 - 3x)dx$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_1^3$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{32}{12} = \frac{37}{12}$$

4-4-1-2 حجم الجسم الدوراني Volume of solid of revolution

يقصد بالجسم الدوراني هو المتولد من دوران المنطقة R في مستوي حول مستقيم في نفس المستوي ويطلق عليه محور الدوران. وهناك طريقتان تستعملان لايجاد حجم الجسم الدوراني وسنوضح هنا احداها.

طريقة القرص الدوراني Circular dish method

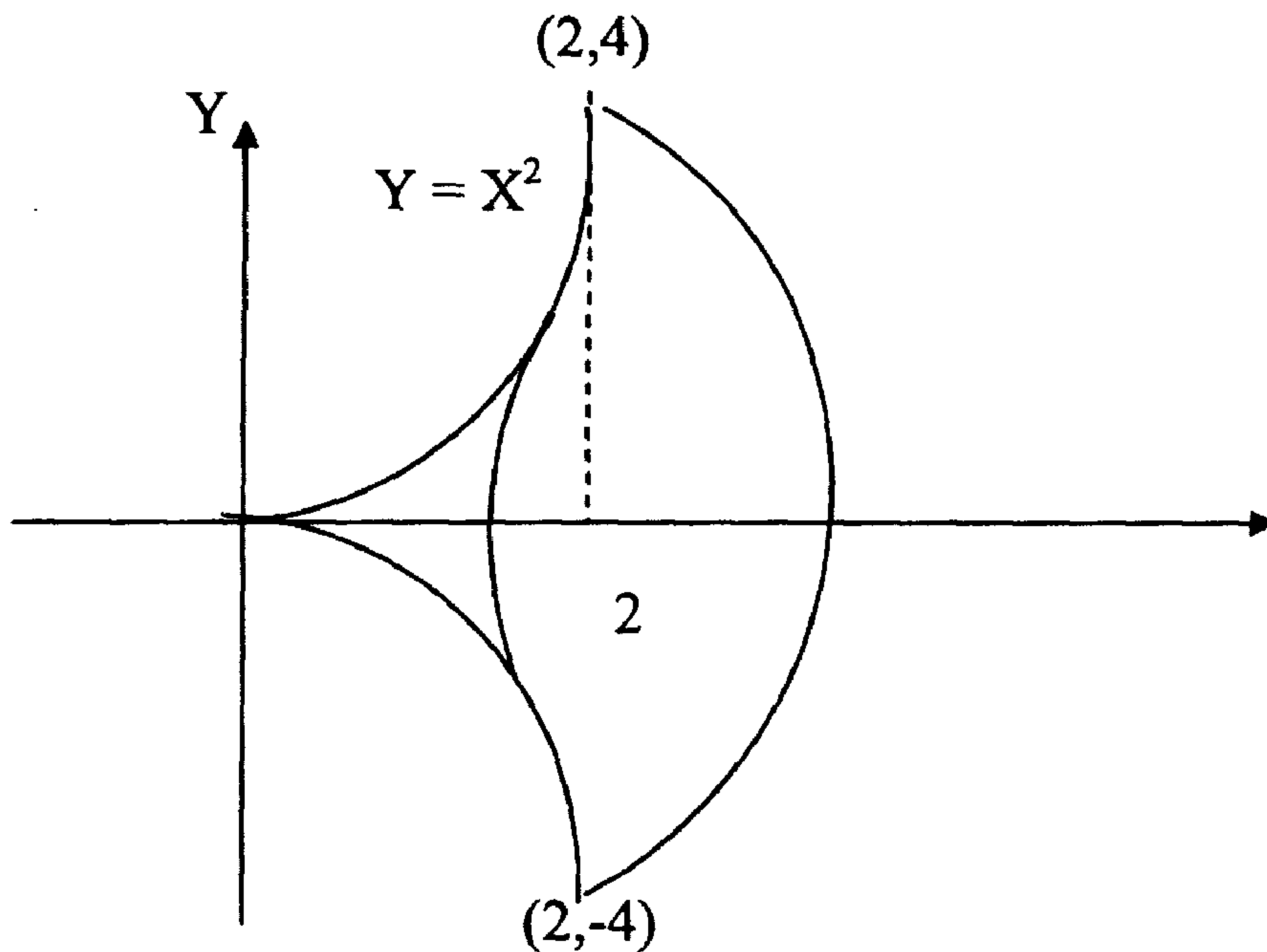
نفرض ان f دالة مستمة في الفترة المغلقة[a,b] وان $f(x) \geq 0$ لكل x في [a,b] ولتكن R المنطقة المحددةبمخطط f ومحور السينات والمستقيمين x=b,x=a وليكن S الجسم المتولد من دوران R حول محور السينات ، فان حجم الجسم V المتولد هو

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

اذ ان π تمثل النسبة الثابتة (3.14).

مثال 11-4

اذا كانت R المنطقة التي يحددها $f(x)=x^2$ ومحور السينات والمستقيم x=2 اوجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة R حول محور السينات



$$V = \pi \int_0^2 [x^2]^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$

اما عندما نجد الحجم الدوراني لمساحة بين منحنيين هما y_2, y_1 علما بان $y_1 \geq y_2 \geq 0$ حول محور السينات فيمكن ايجاده من خلال العلاقة التالية

$$V = \pi \int_a^b [y_1^2 - y_2^2] dx$$

مثال 4-12

جد الحجم المتولد من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y_1 = 2x, y_2 = x^2$ حول محور السينات

الحل:

ان المنطقة المحصورة بين المنحنيين تتحدد من خلال نقاط تقاطع المنحنيين وهي $y_1 = y_2$

$2x = x^2 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow$ x(2-x)=0

x=0 او x=2

وعليه فان الحجم الدوراني الذي يمكن ايجاده كما يلي

$$V = \Pi \int_0^2 \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right]dx$$

$$= \Pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)dx = \Pi\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$= \pi\left[\frac{4}{3}(8) - \frac{1}{5}(32) - 0\right] = \frac{64}{15}\pi$$

3-1-4-4 حساب طول قوس المنحني Arc length of curve

لتكن f(x) دالة مستمرة للفترة [a,b] ومشتقتها f(x) فان طول القوس للمنحني y=f(x) من a الى b هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

مثال 13-4

جد طول قوس المنحني للدالة $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4x}$ من x=1 الى x=3

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=x^2-\frac{1}{4x^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2+1=x^4-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^4}+1$$

$$=x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^4}=\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2$$

$$L=\int_1^3\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^3\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4x}\Big|_1^3=\left(9-\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{53}{6}$$

مثال 14-4

جد طول قوس منحني الدالة $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ من x=0 الى x=3

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)^{1/2}.2x=x\left(x^2+2\right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=x^2\left(x^2+2\right)+1=x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2$$

$$L=\int_0^3\sqrt{\left(x_2+1\right)^2}\qquad dx=\int_0^3\left(x^2+1\right)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+x\Big|_0^3=\frac{3^3}{3}+3-0=9+3=12$$

تمارين الفصل الرابع

1. جد ناتج كل من التكاملات التالية:

a) $\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx$

b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$

c) $\int\frac{x+3}{\left(x^2+6x\right)^{1/2}}dx$

d) $\int\frac{3xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\int a^{2x}dx$

f) $\int x\cot x^2dx$

g) $\int\tan Xdx$

h) $\int(1-x)\sqrt{x}dx$

i) $\int\sin\frac{x}{2}dx$

j) $\int\frac{\sin X+\cos X}{\cos X}dx$

k) $\int e^x\cos Xdx$

l) $\int\frac{dx}{1+\cos Xd}$

m) $\int \frac{dx}{e^{x}+1}$

n) $\int \frac{x+2}{x+1}dx$

2. اوجد المسافة تحت المنحنيات الاتية للحدود المبينة لكل منها:

a) $2\int_{0}(x^{-2}+2x^{\frac{1}{2}}+2)dx$

b) $\int_{0}^{3}\sqrt{3x+1}dx$

c) $\int_{-3}^{-1}\left(x^{3}+1\right)^{2}x^{2}dx$

3. اوجد المساحة المحصورة بالحدود المبينة في كل مما ياتي:

a) بين المنحني $y=4x-x^2$ مع محور السينات من $x=1$ الى $x=3$.

b) بين المنحني $y=9-x^2$ والمستقيم $y=x+3$.

c) بين المنحني $y=x^4-4x^2$ و $y=4x^2$.

d) بين المنحني $y=x^2-4$ و $y=8-2x^3$.

4. اوجد ناتج كل من التكاملات التالية:

a) $\int x^{3}\sqrt{x+1}dx$

b) $\int\left(x^{2}+1\right)LnXdx$

c) $\int \frac{LnX}{x^2} dx$

d) $\int x\cos(2x+1)dx$

e) $\int \sec^2 X dx$

f) $\sin(LnX)dx$

5. جد الحجم المتولد من دوران المنحنيات ادناه ومحور السينات:

a) $y = 2\sqrt{x}$, X=4

b) $y = x - x^2$ محور السينات

c) المنحنين y=3x-1 , $y = x^2 + 1$

6. جد طول قوس المنحنيات التالية:

a) $y^2 = x^3$ من $x = \frac{4}{3}$ الى x=4.

b) $8y = x^4 + 2x^{-2}$ من x=1 الى x=2.

c) $y = x^{2/3}$ من x=-1 الى x=8.

7. اوجد ناتج كل من التكاملات التالية:

a) $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$

b) $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}$

c) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+1}$

d) $\int \frac{x^2dx}{x^2+2x+1}$

e) $\int \frac{\sin Xdx}{\cos^2 X+\cos X-2}$

f) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

8. اوجد ناتج كل من التكاملات التالية:

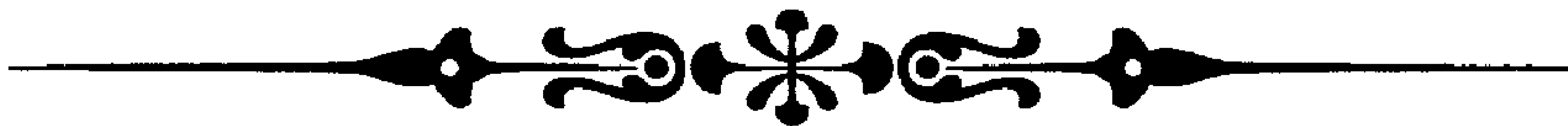
a) $\int \sqrt{x^2-16}dx$

b) $\int \frac{Xdx}{4+x^2}$

c) $\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$

e) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}}$






الفصل الخامس
المتسلسلات غير المنتهية

5-1 المتتابعة Sequence:

5-2 المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

5-3 متسلسلة تايلر ومتسلسلة ماكلورين



المتسلسلات غير المنتهية

5.1 المتتابعة Sequence:

هي الدالة التي مجالها مجموعة الاعداد الطبيعية N والمدى لها مجموعة جزئية S تسمى المتتابعة، فاذا كان المدى للمتتابعة هو مجموعة جزئية من R (مجموعة الاعداد الحقيقية) فان المتتابعة تسمى بالمتتابعة الحقيقية (Real Sequence) ويعبر عنها بالشكل

$$\langle f_n \rangle = \langle f_1, f_2, f_3, \dots, f_n \rangle \forall n \in N$$

مثال **5-1**:

ان المتتابعة $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\dots\dots \right\rangle$ هي متتابعة حقيقية وتكتب بالشكل $\forall n \in N$ $\quad f_n = \frac{1}{n}$.

5.1.1 طرق كتابة المتتابعة:

1) بذكر جزء من حدود المتتابعة مثل

$$1. \langle f_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\dots\dots \right\rangle$$

$$2. \langle f_n \rangle = \langle 1, -1, 1, -1, 1, \dots\dots \rangle$$

ب) بذكر الحد العام مثل

$$1. f_n = (-1)^{n-1}.3 \qquad \forall n \in N$$
$$2. \langle f_n \rangle = \langle 3,-3,3,-3,\ldots.. \rangle$$

جـ) بذكر جزء من الحدود والحد العام في ان واحد فمثلا

لنفرض ان $f_1=5$ و $f_2=7$ فان $f_{n+1} = \frac{1}{3}(f_n - f_{n-1})$

5-1-2 مدى المتابعة Range of Sequence :

المدى للمتتابعة $\langle f_n \rangle$ هو مجموعة القيم $[f_n : n \in N]$ التي تحتوي على حدود مختلفة بدون تكرار ودون اعتبار لموقع العنصر.

5-1-3 المتتابعة المتقاربة:

تكون المتتابعة متقاربة (محددة) اذا كانت لها نقطة غاية واحدة.
وتكون المتتابعة متقاربة (ليست محددة) عندما لايكون لها نقطة غاية.

مثال 2-5

اوجد المدى للمتتابعة الاتية

$$\langle f_n \rangle = \langle 3,-3,3,-3,3,-3 \rangle$$

المدى هو [3,-3]

مثال 3-5:

ماهو مدى المتتابعة $\langle g_n \rangle = \langle 5,5,5,5,5,\ldots\ldots \rangle$

المدى للمتتابعة هو [5]

5.1.4 غاية المتتابعة Limit of a Sequence:

المتتابعة $\langle f_n \rangle$ يقال لها غاية L لكل n كبيرة ولكل $\in > 0$ عدد صحيح موجب m يعتمد على $\in$ فان:

$$|f_n - L| < \in, \forall n \geq m$$

ويعبر عن ذلك بالشكل $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = L$

مثال 4-5:

بين ان المتتابعة $f_n = \frac{1}{n}, \forall n \in N$ متقاربة للصفر.

$$\because |f_n - L| < \in$$
$$\therefore \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \in \Rightarrow \frac{1}{n} < \in \; or \; n > \frac{1}{\in}$$

فلنفرض ان m أي عدد صحيح موجب اكبر من $\frac{1}{\in}$ فان

$$|f_n - 0| < \in, \forall n \geq m$$

اي ان $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$.

مثال 5-5:

بين ان المتتابعة $\langle f_n \rangle$ متقاربة الى $\frac{1}{2}$ اذ ان

$$f_n = \frac{n^2+1}{2n^2+5}, \forall n \in N$$

$$|f_n - L| < \in \to \left|\frac{n^2+1}{2n^2+5} - \frac{1}{2}\right| < \in$$

$$\frac{3}{2(2n^2+5)} < \in \to \frac{3}{4n^2} \in$$

$$i.e \qquad n^2 > \frac{3}{4\in} \qquad \therefore n > \sqrt{\frac{3}{4\in}}$$

لنفرض ان m عدد صحيح اكبر من $\sqrt{\frac{3}{4\in}}$ وعليه فان

$$\left|f_n - \frac{1}{2}\right| < \in, \forall n \geq N$$

$$\lim_{n \to \frac{1}{2}} f_n = \frac{1}{2}$$

اي ان المتتابعة تقترب الى $\frac{1}{2}$

مثال 6-5:

المتتابعة $\langle f_n \rangle = \langle 1,-1,1,-1,.....\rangle$ ليست متقاربة لان

$\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ و $\lim_{n\to\infty} f_n = -1$ اي ان $-1 \leq f_n < 1, \forall n \in N$. فانها ليست متقاربة.

مثال 5-7:

المتتابعات التالية غير محددة وليست متقاربة

$$1. f_n = n^3 \qquad \forall n \in N$$
$$2. f_n = -2n \qquad \forall n \in N$$
$$3. f_n = (-1)^n n \quad \forall n \in N$$

مثال 5-8

المتتالية $f_n = \frac{1}{n}, \forall n \in N$ متقاربة وتقترب من الصفر لان المتتابعة ستحدد بالشكل $0 \le f_n \le 1$ وان الصفر هو نقطة الغاية الوحيدة للمتتابعة اي تقترب من الصفر ويمثل الغاية لها.

5-1-5 المتتابعة المتباعدة:

المتتابعة $\langle f_n \rangle$ يقال لها متباعدة وتتباعد الى $+\infty$ اذا لكل عدد موجب N مهما كان كبيرا يوجد عدد صحيح موجب m بحيث ان $f_n > N, \forall n \ge m$ اي ان $\lim_{n \to \infty} f_n = +\infty$

ويقال لها متباعدة الى $-\infty$ اذا لكل عدد سالب M مهما كان صغيرة يوجد عدد صحيح m بحيث ان

$$f_n < M \qquad \forall n \ge m$$
$$\lim_{n \to \infty} f_n = -\infty$$

مثال 9-5:

بين ان المتتابعة التالية متقاربة الى $\frac{3}{4}$

$$f_n = \frac{3n-1}{4n+5}$$

نفرض ان $0 < \in$ اي عدد

$$\left|f_n - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{3n-1}{4n+5} - \frac{3}{4}\right| = \frac{19}{4(4n+5)}$$

$$\left|f_n - \frac{3}{4}\right| < \in$$

كلما كانت $\frac{19}{4(4n+5)} < \in$ فان $n > \frac{1}{4}(\frac{19}{4\in} - 5)$

افـرض ان $m > \frac{1}{4}(\frac{19}{4\in} - 5)$ اذ ان m عـدد صـحيح موجـب فـان $m > \frac{1}{4}(\frac{19}{4\in} - 5) \in N$ اي ان $\left|f_n - \frac{3}{4}\right| < \in, \forall n \geq m$ وان المتتابعـة متقاربـة الى $\frac{3}{4}$.

5.2 المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

اذا كانت $\langle a_n \rangle$ اي متتابعة فـان متتابعـة المجـاميع الجزئيـة للمتتابعـة $\langle a_n \rangle$ تسمى بالمتسلسلة (series) اي ان

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.

.

.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

ان المجموع $\sum_{i=1}^{n} a_i$ يسمى متسلسلة n من الحدود والمجموع $\sum_{i=1}^{n} a_i$ يسمى متسلسلة لانهائية (Infinite Series).

5-2-1 المتسلسلة المتقاربة وغير المتقاربة:

تسمى المتسلسلة $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$ متقاربة (convergent) وتكتب بالشكل $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ وان s عدد الحدود ، واذا اقترب المجموع $\sum a_n$ من $+\infty$ او $-\infty$ عندما $n \to \infty$ فان المتسلسلة تسمى متباعدة (Divergent) غير متقاربة وتكتب $\lim_{n \to \infty} S_n = +\infty$ او $\lim_{n \to -\infty} S_n = -\infty$ ، واذا كانت السلسلة غير متقاربة وليست متباعدة فانها تسمى متذبذبة (Oscillate) وبصورة عامة اذا كانت الغاية $\lim_{n \to \infty} S_n = k$ فان المتسلسلة تكون متقاربة.

مثال 5-10:

$$S_n = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية فان

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$$

وبعد ايجاد قيمتي B,A تصبح بالشكل

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

وعليه يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل

$$S_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+.......+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}=1$$

وعلية فان المتسلسلة متقاربة.

مثال 11-5: افرض ان

$$S_n=1+1+1+.........+1$$

فـاذا كانــت $S_1=1, S_2=2, S_m=m$ فــان $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} n=\infty$ اي ان الغاية غير معرفة فالمتسلـسلة متباعـدة وبـنفس الطريقـة يمكـن بيـان ان المتسلسلات $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$.

مثال 12-5:

افرض ان $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ والتي تكتب بالشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+1-1+.......$$

اي ان $\langle S_n \rangle = \langle 1,0,1,0,..... \rangle$ هذا يعني ان $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ عندما يكون عدد الحدود فردي وان $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ عندما يكون عدد الحدود زوجي ، وعليه فالمتسلسلة متذبذبة لاتقترب الى قيمه واحدة.

مثال 13-5: لنفرض لدينا المتسلسلة العددية التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+.......$$

$$S_n = 1+2+3+......+n \qquad ....(1)$$

$$S_n = n+(n-1)+....+3+2+1 \qquad .....(2)$$

وبجمع الشكلين (1) و(2) نحصل على:

$$2S_n = (1+n)+(1+n)+.......+(1+n)$$

$$2S_n = n(n+1)$$

اي ان الحـــــد العـــــام $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ وان $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n(n+1) = \infty$ فالمتسلسلة متباعدة.

5.2.2 اختبار النسبة للتقارب

اذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة وكان:

فان $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n}$

1. اذا كان $r > 1$ فان المتسلسلة متباعدة.

2. اذا كان $r < 1$ فان المتسلسلة متقاربة.

3. المتسلسلة غير معرفة اذا كان r =1 . .

مثال 14-5

اختبر كل من المتسلسلات التالية متباعدة ام متقاربة باستخدام اختبار النسبة.

$1)\sum \frac{3^{2n}}{n!}$ $\quad 2)\sum \frac{2^n}{n^2}$ $\quad 3)\sum \frac{3^n}{n2^n}$

$1)a_n = \frac{3^{2n}}{n!} \qquad ,a_{n+1} = \frac{3^{2(n+1)}}{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2(n+1)}}{n+1}.\frac{n!}{3^{2n}} = \frac{3^{2n}.3^2}{(n+1)n!} = \frac{9}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{9}{n+1}0 < 1$$

فالمتسلسلة متقاربة.

$$2)a_n=\frac{2^n}{n^2} \qquad ,a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}.n^2}{(n+1)^2.2^n}=\frac{2n^2}{(n+1)^2}=2(\frac{n}{n+1})^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}2(\frac{n}{n+1})^2=2*1=2>1$$

فالمتسلسلة متباعدة.

$$3)a_n=\frac{3^n}{n.2^n} \qquad ,a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1).2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{n+1}.n.2^n}{(n+1).2^{n+1}.3^n}=\frac{3n}{2(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2(n+1)}=\frac{3}{2}>1$$

فالمتسلسلة متباعدة.

3-5 متسلسلة تايلر ومتسلسلة ماكلورين

Taylor's & Maclaurin's series

اذا كانت f(x) دالة وان جميع درجات المشتقة لها معروفة عنـدما x=0 او عندما x=a وان تلك الدالة يمكن تمثيلها بالمتسلسلة التالية:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0).x}{1}+\frac{f''(0).x^2}{2!}+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+$$

فان f(x) تسمى بمتسلسلة ماكلورين.

واذا تم تمثيل تلك الدالة بالمتتالية التالية عندما x=a أي ان:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+...$$

فان f(x) تسمى بمتسلسلة تايلر.

مثال 5-15

اكتب الدالة f(x)=SinX بقوى Xباستخدام متسلسلة ماكلورين:

$$f(x)=Sinx$$

$$f(0)=Sin(0)=0$$

$$f'(x)=C0sx \quad \rightarrow \quad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin X \quad \rightarrow \quad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=-\cos X \quad \rightarrow \quad f'''(0)=-1$$

أي ان

$$Sin(x)=0+1.x+\frac{0}{2}x^2+\frac{-1}{3}x^3+....$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...$$

مثال 6-5

اكتب الدالة $e^{x/2}$ بقوى (x-2) باستخدام متسلسلة تايلر.

$$f(x) = e^{x/2} \quad \rightarrow \quad f(2) = e$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} \quad \rightarrow \quad f(2) = \frac{1}{2}e$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2} \quad \rightarrow \quad f''(2) = \frac{1}{4}e$$

أي

$$e^{x/2} = e[1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.\frac{(x-2)^{n-1}}{n-1} + \ldots$$

تمارين الفصل الخامس

1. اختبر المتسلسلات الاتية تقاربية ام تباعدية.

a) $1+\frac{2}{3}+...+\frac{2^{n-1}}{3*5*7....(2n-1)}+...$

b) $\sum\frac{1}{5^{n-1}}.\frac{3^{n-1}}{n^2}$

c) $\sum\frac{n^2}{2^n}$

d) $\sum\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{3}{2}\right)^n$

e) $\sum\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}$

2. ما هي قيم X التي تتقارب من اجلها المتسلسلة

$$X+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+...$$

مستخدما اختبار النسبة.

3. استخدم اختبار النسبة لمعرفة فيما اذا كانت المتسلسلات الاتية متقاربة ام متباعدة

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$

b) $\sum\frac{1}{n^2+1}$

c) $\sum\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

d) $\sum\frac{n}{n^2+1}$

e) $\sum\frac{n^2}{2^n}$

f) $\sum\frac{1}{10^n}$

4. اكتب الدوال التالية بقوى X باستخدام متسلسلة ماكلورين

a) $f(x)=Ln(1+x)$

b) $f(x)=\cos(x)$

c) $f(x)=Sin^2X$

d) $f(x)=e^x$

e) $f(x)=\tan(x)$

5. اكتب الدالة f(x)=LnX بقوى (x-2) باستخدام متسلسلة تايلر.

6. اكتب cot(x) بقوى $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ باستخدام متسلسلة تايلر.

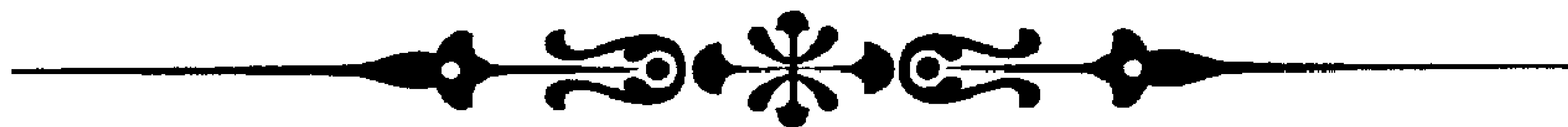
7. اكتب cos(x) بقوى $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ باستخدام متسلسلة تايلر.

8. استخدام اختبار النسبة للمتسلسلات الاتية وتحديد قيم x التي يجعلها متباعدة او متقاربة.

a) $\sum \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n n^2}$

b) $\sum \frac{n!(x-3)^n}{1*3...(2n-1)}$

c) $\frac{1}{3}+\frac{x}{5}+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{11}+...+\frac{x^n}{3+2^n}+...$





الفصل السادس
المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى
First order Differential Equation

6-1 مفهوم المعادلة التفاضلية

6-2 الحل العام والحل الخاص

6-3 حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى



المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى

6-1 مفهوم المعادلة التفاضلية:

هي المعادلة التي تحوي على مشتقة او اكثر فلو تأملنا الامثلة الاتية

$$1.\frac{dy}{dX} = X + 2$$

$$2.\frac{d^2y}{dX^2} + 5\frac{dy}{dX} + 4y = 0$$

$$3.X^2y' + y = 3$$

$$4.y''' + 3(y'')^2 + y' = \sin X$$

$$5.(y'')^2 + (y')^3 + 6y = 3X^2$$

$$6.\frac{\partial Z}{\partial X} = Z + X\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$7.\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 3X^2 + y$$

فاذا احتوت المعادلة التفاضلية على متغير مستقل واحد كما في المعادلات (1-5) ومشتقات اعتيادية فالمعادلة تسمى بمعادلة تفاضلية اعتيادية ، اما اذا كان هناك اكثر من متغير مستقل واحد كما في المعادلتين 6و7 وفيها مشتقة جزئية فتسمى معادلة تفاضلية جزئية ، وان مرتبة المعادلة التفاضلية تمثل اعلى درجة مشتقة موجودة في المعادلة فالمعادلات

(6,3,1) هـي مـن المرتبـة الاولى في حـين ان المعـادلات (7,5,2) هـي معادلات من المرتبة الثانية ، اما المعادلة 4 فهـي مـن المرتبـة الثالثـة . امـا درجة المعادلة التفاضلية فهي القوة المرفوعة لها اعـلى درجـة مـشتقة (اس اعلى مشتقة) فان جميع المعادلات السابقة هي مـن الدرجـة الاولى ماعـدا المعادلة 5 فهي من الدرجة الثانية .

6.2 الحل العام والحل الخاص:

من المألوف ان يكون للمعادلة التفاضلية حلولا تحـوي عـلى ثوابـت اختيارية فمثلا

$$y=Ax^2+Bx+C$$

يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^3y}{dX^3}=0$ ويـسمى هـذا الحـل بالحـل العام (General solution) ولو اعطينا قيم محددة للثوابت فمثلا عندما A=B=C=0 فـان y=0 واذا كـان A=0,B=2,C=5 فـان الحـل سـيكون y=2x+5 واذا كان A=1,B=2, C=3, فـان الحـل يكـون $Y=x^2+2x+3$ فتسمى الحلول الثلاثة حلولا خاصة (particular solution).

مثال 1-6:

بين ان y=sin x تمثل حل للمعادلة التفاضلية $y''+y=0$

$$y = \sin x \quad \to y' = \cos x \quad y'' = -\sin x$$

اذن

$$\sin x + \sin x = 0$$

فان y=sin x تمثل حل للمعادلة التفاضلية.

مثال 2-6:

بين ان $y= x^2+c$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' = 2x$ وما هي قيمة c التي تجعل الحل ماراً بالنقطة (4،1).

$$y = x^2 + c \quad \to y' = 2x$$

وبالتعويض عن x=1، y=4 نحصل على

$$4 = 1 + c \quad \to \quad c = 3$$

6-3 حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الاولى

Solution of First Ordinary Differential Equation

هناك عدة طرق لحل هذا النوع من المعادلات ويعتمد ذلك على نـوع المعادلة التفاضلية وفيما يلي تلك الطرق.

6-3-1 فصل المتغيرين variables separable

اذا امكن وضع المعادلة التفاضلية بالشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} = M(x).N(y) \text{ ....} (6\text{-}4)$$

اذ ان M(x) دالـة لـ x وان N(y) دالـة لـ y. ولحـل هـذا النـوع مـن المعادلات نضع المعادلة السابقة (4–6) بالشكل

$$\frac{dy}{N(y)} = M(x)dx$$

أي ان المتغيرات انفصلت. وياخذ التكامل للطرفين

$$\int\frac{dy}{N(y)} = \int M(x)dx + C$$

اذ ان c ثابت اختياري

مثال 3-6:

اوجد حل المعادلات التفاضلية الاتية:

1) $\frac{dy}{dx} = x$

$$dy = x\,dx$$

$$\int dy = \int x dx + c$$

$$y = \frac{x^2}{2} + c$$

2) $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ عندما $y=0\ ,\ x=0$

$$\frac{dy}{dx} e^{2x} . e^{y}$$

$$\frac{dy}{e^{y}} = e^{2x} dx$$

$$e^{-y} dy = e^{2x} dx$$

$$\int e^{-y} dy = e^{2x} dx + c$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

وعندما $x=0$ ، $y=0$ فان

$$-e^{o} = \frac{1}{2} e^{o} + c \quad \Rightarrow \quad c = -1 - \frac{1}{2} = -3/2$$

وعليه فان الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو:

$$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} - 3/2$$

$$e^{-y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

3) $\frac{dy}{dx} = -2x \tan y$

عندما $y = \frac{\pi}{2}$ ، x=0

$$\frac{dy}{\tan y} = -2xdx$$

$\cot y\, dy = -2x\, dx$

$\text{Ln Sin } y = -x^2 + c$

وبالتعويض عن x=0، $\dot{y} = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Ln Sin}\frac{\pi}{2} = c \;\Rightarrow\; c = 0$$

فان الحل الخاص للمعادلة هو

$\text{Ln Sin } y = -x^2$

4) $\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - xy = xy(y-1)$$

$$\frac{dy}{y(y-1)} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int xdx$$

وباستخدام الكسور الجزئية فان

$$\frac{1}{y(y-1)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}=\frac{A(y-1)+By}{y(y-1)}=\frac{Ay+By-A}{y(y-1)}=\frac{y(A+B)-A}{y(y-1)}$$

A+B= 0 .... (1)

- A =1 .... (2)   B=1

أي ان

$$\int\left(\frac{-1}{y}+\frac{1}{y-1}\right)dy=\int x dx+c$$

$$-\operatorname{Ln} y+\operatorname{Ln}(y-a)=\frac{x_2}{2}+C$$

$$\operatorname{Ln}\frac{y-1}{y}=\frac{x^2}{2}+c$$

6-3-2 المعادلة التفاضلية المتجانسة

Equation Homogeneous Differential،

وهي المعادلة التفاضلية التي يمكن وضعها بالشكل الاتي:

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

ولحل هذا النوع من المعادلات نفرض ان:

$$y=vx$$

وباخذ التفاضل بالنسبة لـ x فان

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

أي ان

$$x\frac{dv}{dx} + v = g(v)$$

وبفصل المتغيرات ينتج:

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

وبأخذ تكامل الطرفين يكون الحل

$$\int\frac{dv}{g(v) - v} = \int\frac{dx}{x} + c$$

ثم يتم التعويض عن $v = \frac{y}{x}$ للحصول على المعادلة بدلالـة المتغـيرين x، y.

مثال 4-6:

أوجد الحل للمعادلات التفاضلية التالية

1) $$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

وبفرض ان y=vx فان $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{x}{vx} + \frac{vx}{x}$$

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1}{v} + v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

$$vdv = \int\frac{dx}{x} + c$$

$$\frac{v^2}{2} = Lnx + c$$

$$v^2 - 2Lnx = 2c$$

2) $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

$$2\frac{yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2} + 1 = 0$$

$$y = vx \qquad \rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

وبالتعويض ينتج

$$2v(xv' + v) - v^2 + 1 = 0$$

وبعد ترتيب المعادلة نحصل على

$$2xvv' + v^2 + 1 = 0$$

$$\frac{2vdv}{1+v^2} = -\frac{dx}{x}$$

$$Ln(1+v^2) = -Lnx + c$$

$$Ln(1+v^2) + Lnx = c$$

$$Lnx(1+v^2) = c$$

$$x(1+v^2) = e^c = c_1$$

$$x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = c_1$$

$$x\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = c_1$$

$$x^2 + y^2 = c_1 x$$

3) $\left(x^2+3y^2\right)dx-2xydy=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}=\frac{x}{2y}+\frac{3y}{2x}$$

نفرض ان $\frac{dy}{dx}=v+xv' \leftarrow y=vx$

$$xv'+v=\frac{1}{2v}+\frac{3}{2}v$$

$$xv'=\frac{1}{2v}+\frac{v}{2}=\frac{1+v^2}{2v}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{2vdv}{1+v^2}$$

$$Lnx=Ln\left(1+v^2\right)+c_1$$

$$Ln\frac{x}{1+v^2}=c_1$$

$$\frac{x}{1+v^2}=e^{c1}=c$$

وبالتعويض عن v نحصل على المعادلة الاتية

$$x^2=c(x^2+y^2)$$

6.3.3 المعادلة التفاضلية الخطية

Linear differential equation:

وهي المعادلة التي تكون بالشكل الاتي:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x) \quad \text{..............................} (6\text{-}3\text{-}1)$$

حيث ان p(x)، Q(x) هما دوال لـx. ولحل هذه المعادلة نحاول ايجاد دالة مثل I(x) بحيث عند ضرب المعادلة بهذه الدالة يصبح الطرف الايسر مشتقة حاصل ضرب I(x).y فان:

$$I(x)\frac{dy}{dx}+I(x)P(x).y=I(x).Q(x)$$

أي ان

$$I(x)\frac{dy}{dx}+I(x)P(x).y=\frac{d(I.y)}{dx} \quad \text{.................} (6\text{-}3\text{-}2)$$

وعند فتح الطرف الايمن في العلاقة (6-3-2) واختصار الحدود ينتج:

$$\frac{dI(x)}{dx}=I(x)P(x)$$

وبفصل المتغيرات

$$\frac{dI(x)}{dx} = P(x)dx$$

$$\text{Ln}\, I(x) = \int P(x)dx + \text{Lnc}$$

$$I(x) = ce^{\int p(x)dx}$$

وعندما c=1 فان

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

وتسمى هذه الدالة بالعامل التكاملي (Integration factor)

وباستعمال هذا العامل تصبح العلاقة (1-3-6) كما يلي:

$$\frac{d(I(x).y)}{dx} = I(x).Q(x)$$

وبحلها باستخدام التكامل

$$I(x).y = \int I(x)Q(x)dx = c$$

مثال 5-6:

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

1. $$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$$

$$P(x) = 1 \Rightarrow \int P(x)dx = x$$

فان العامل التكاملي I.F هو e^x

ويضرب طرفي المعادلة التفاضلية بالعامل التكاملي ينتج:

$$\left(\frac{dy}{dx}+y\right)e^{x}=1$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{x}\right)=1$$

$$ye^{x}=x+c$$

2) $$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^{2}$$

$$P(x)=\frac{1}{x}\rightarrow\int P(x)dx=\int\frac{1}{x}dx=Lnx$$

$$I.F=e^{Lnx}=x$$

$$x\left(\frac{dy}{dx}+y.\frac{1}{x}\right)=x^{2}x$$

$$xy=\frac{1}{4}x^{4}+c$$

3) $$x\frac{dy}{dx}+2y=x^{4}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}=\frac{x^{4}}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x^{3}$$

$$P(x)=\frac{2}{x}\rightarrow\int P(x)dx=\int\frac{2}{x}dx=2Lnx$$

$$I.F = e^{2Lnx} = x^2$$

$$x^2\left(\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y\right) = x^5$$

$$\frac{d}{dx}\left(yx^2\right) = x^5$$

$$yx^2 = \frac{x^6}{6} + c$$

4) $$1 + (x\tan y - \sec y)\frac{dy}{dx} = 0$$

وبضرب طرفي المعادلة بـ $\frac{dx}{dy}$ ينتج:

$$\frac{dx}{dy} + x\tan y = \sec y$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية فهناك اسلوبان هما

1. نبدل x محل y و y محل x.

2. نأخذ العامل التكاملي بالنسبة لـ y بدل x.

وسنستخدم الاسلوب الثاني:

$$P(y) = \tan y \rightarrow \int P(y)dy = \int \tan y\, dy = Ln\sec y$$

$$I.F = e^{\text{Ln} \sec y} = \sec y$$

$$\sec y\left(\frac{dx}{dy} + x\tan y\right) = \sec y \sec y$$

$$\frac{d}{dy}(x\sec y) = \sec^2 y$$

$$x\sec y = \tan y + c$$

6-3-3-1 معادلة برنولي Bernoulli's Equation

ان المعادلة التالية تعرف بمعادلة برنولي

$$\frac{dy}{dX} + Py = Qh^n$$

اذ ان P,Q دوال لـ X فقط, n ثابت. وهناك حالتان لهذه المعادلة هما :

أ- عندما n=1 تكون المعادلة من نوع المنفصلة (Separable) وتحل بطريقة فصل المتغيرين .

ب- عندما $n \neq 1$ نضرب طرفي المعادلة في y^{-n} فيكون الناتج

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q$$

لنفرض الان ان $Z = y^{1-n}$ فيكون $\frac{dZ}{dX} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dX}$

وبالتعويض يكون $\frac{1}{1-n}\frac{dZ}{dX}+PZ=Q$

او $\frac{dZ}{dX}+(1-n)PZ=(1-n)Q$

وان المعادلة الاخيرة هي معادلة خطية لـ Z ونواصل الحل بايجاد العامل التكاملي $I.F=e^{\int(1-n)PdX}$

مثال 6-6

حل المعادلة التالية $\frac{dy}{dX}+\frac{y}{X}=y^2$

نضرب المعادلة ب y^{-2} تكون $y^{-2}\frac{dy}{dX}+\frac{1}{Xy}=1$

نفرض ان $Z=y^{-1}$ فتكون

$$\frac{dZ}{dX}=-y^{-2}\frac{dy}{dX}$$

وبالتعويض يكون $-\frac{dZ}{dX}+\frac{Z}{X}=1$ او $\frac{dZ}{dX}-\frac{Z}{X}=-1$

$\therefore P(X)=-\frac{1}{X}$ ، $\int P(X)dX=-\int\frac{dX}{X}=-Ln|X|$

اي ان $I.F=e^{\int P(X)dX}=e^{-Ln|X|}=\frac{1}{X}$

وبالضرب بالعامل التكاملي ينتج

$$1 + XyLn|X| = Cy \quad \text{أو} \quad \frac{Z}{X} = -Ln|X| + C$$

مثال 7-6

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dX} - y\tan X = \frac{SinXCos^2X}{y}$$

نضرب المعادلة في y^{-2} نحصل على

$$y^2\frac{dy}{dX} - y^3\tan X = \sin X\cos^2 X$$

افرض ان $Z=y^3$ فان $\frac{dZ}{dX} = 3y^2\frac{dy}{dX}$ وبالتعويض

$$\frac{1}{3}\frac{dZ}{dX} - Z\tan X = \sin X\cos^2 X$$

$$\frac{dZ}{dX} - 3Z\tan X = 3\sin X\cos^2 X$$

$$\therefore P(X) = -3\tan X,, \int p(X)dX = -3\tan XdX = -3Ln|\cos X|$$

$$\therefore I.F = e^{\int P(X)dX} = e^{Ln|\cos^3 X|} = \cos^3 X$$

$$\therefore \frac{d}{dX}(Z\cos^3 X) = 3\sin X\cos^5 X$$

$$Z\cos^3 X = -\frac{3}{6}\cos^6 X + C$$

$$2y^3\cos^3 X + \cos^6 X = B$$

6-3-4 المعادلة التفاضلية التامة Exact differential equation:

اذا كانت المعادلة التفاضلية من النوع

$$M(x,y)=dx+N(x,y)dy=0 \quad \text{..................(6-3-3)}$$

بحيث ان $\frac{\partial N}{\partial X}=\frac{\partial M}{\partial Y}$ فان المعادلة التفاضلية تسمى تامة

وان اسلوب الحل يتلخص بايجاد دالة مثل f(x,y) بحيث ان

$$M(x,y)=\frac{df(x,y)}{dx}, \qquad N(x,y)=\frac{df(x,y)}{dy}$$

مثال 6-8:

اوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$y^2dx+2xydy=0$$

$$M(x,y)=y^2 \rightarrow \frac{dM}{dy}=2y$$

$$N(x,y)=2xy \rightarrow \frac{dN}{dx}=2y$$

فان المعادلة التفاضلية تامة

ولغرض ايجاد الدالة f(x,y) نلاحظ ان

$$d(xy^2)=2xydy+y^2dx$$

وبالتعويض ينتج

$$d\left(xy^2\right)=0$$

$$xy^2=c$$

2) $$\left(3x^2y+2xy\right)dx+\left(x^3+x^2+2y\right)dy=0$$

$$M(x,y)=3x^2y+2xy \rightarrow \frac{dM}{dy}=3x^2+2x$$

$$N(x,y)\left(x^3+x^2+2y\right) \rightarrow \frac{dN}{dx}=3x^2+2x$$

وبما ان $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$ فالمعادلة تامة.

$$\frac{df(x,y)}{dx}=M(x,y)=3x^2y+2xy \text{ .... } (1)$$

$$\frac{df(x,y)}{dy}=N(x,y)=x^3+x^2+2y \text{ .... } (2)$$

وباجراء عملية التكامل للمعادلة الاولى نحصل على

$$f(x,y)=x^3y+x^2y \text{ .... } (3)$$

ثم نكتب المعادلة (3) بالشكل

$$f(x,y)=x^3y+x^2y+\phi(y)\text{.......................}(4)$$

اذ اننا نود معرفة $\Phi(y)$ وبايجاد المشتقة لy للمعادلة (4) ينتج:

$$\frac{df(x,y)}{dy}=x^3+x^2+\phi'(y)\text{ ....}(5)$$

وبمساواة معادلة (5) مع معادلة (2) ينتج:

$$x^3+x^2+2y=x^3+x^2+\phi'(y)$$

نجد ان $\phi'(y)=2y$ أي ان

$$\phi(y)=y^2+c$$

وتكون الدالة f(x,y) كما يلي

$$f(x,y)=x^3y+x^2y+y^2+c$$

التي تفاضلها هو M(x,y) dx+N(x,y)dy ويصبح الحل العام هو

$$x^3y+x^2y+y^2=c$$

3) $(xy\cos xy+\sin xy)dx+(x^2\cos xy+e^y)dy=0$

$$M(x,y)=xy\cos xy+\sin xy$$

$$\frac{dM}{dy}=-x^2y\sin xy+x\cos xy+x\cos xy$$

$$=2x\ xosxy-x^2y\sin xy$$

$$N(x,y)=x^2\cos xy+e^y$$

$$\frac{dN}{dx}=-x^2\sin xy.y+2x\cos xy$$

$$=2x\cos xy-x^2y\sin xy$$

وبما ان $\frac{dN}{dx}=\frac{dM}{dy}$ فالمعادلة التفاضلية تامة

$$\frac{df(x,y)}{dx}=xy\cos xy+\sin xy$$

$$\frac{df(x,y)}{dy}=x^2xosxy+e^y$$

وبتكامل المعادلة الاخيرة بالنسبة لـ y ينتج:

$$f(x,y)=x\sin xy+e^y+\phi(x)$$

وبتفاضل هذه المعادلة بالنسبة لـ x ينتج:

$$\frac{df(x,y)}{dx}=xy\cos xy+\sin xy+\phi'(x)$$

أي ان

$$xy\cos xy+\sin y=xy\cos xy+\sin xy+\phi'(x)$$

اذن

$$\phi'(x)=0\rightarrow\phi(x)=c$$

أي ان

$$f(x,y) = x\sin xy + e^{y} + c$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هي:

$$x\sin xy + e^{y} = c$$

تمارين الفصل السادس

اوجد الحل للمعادلات التفاضلية التالية:

1. $\frac{dy}{dx}+xy=xy^2$

2. $\sin x\frac{dy}{dx}+2y\cos x=\cos x$

3. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{x+1}{(x+2)^2}$

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(x+y-1)\frac{dy}{dx}+x(y-1)=0$

5. $(xLnx)y'=y$

6. $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$

7. $y'=\frac{y}{x}+\cos\left(\frac{y-x}{x}\right)$

8. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\frac{dy}{dx}-x=0$

9. $(x + y + 1)dx + (y - x - 3)dy = 0$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y - 2}{3x + y - 5}$

11. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \sin x$

12. $xdy + ydx = \sin xdx$

13. $(\sin^2 x - y)dx - \tan xdy = 0$

14. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$

15. $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \frac{\sin x \cos^2 x}{y^2}$

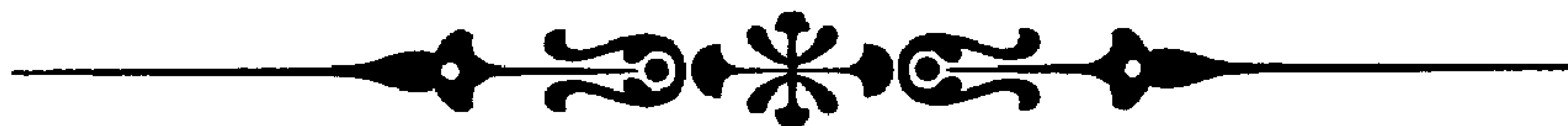
16. $2xydx + (x^2 + 1)dy = 0$

17. $(2xydx) + (x^2 + 1)dy = 0$

18. $[x \cos(x + y) + \sin(x + y)]dx + x \cos(x + y)dy = 0$

19. $(2x + y + 1)dx + (x + 3y + 2)dy = 0$

20. $x^2 dx + ye^y dy = 0$






الفصل السابع
التحليل العددي
Numerical Analysis



التحليل العددي

7-1 تمهيد:

ان التحليل العددي يتضمن دراسة وتقييم طرق حساب نتائج عددية مطلوبة من بيانات عددية معطاة ويعتبر التحليل العددي جزءا من علم معالجة المعلومات، فنعتبر البيانات المعطاة تمثل المدخلات والنتائج المطلوبة هي المخرجات وطريقة الحساب تمثل بالنظام الحسابي. كما ان التحليل العددي يتعلق باشتقاق ووصف وتحليل طرق الحصول على حلول عددية لمسائل رياضية يصعب عادة حلها بالطرق التحليلية الجبرية الاعتيادية.

نادرا ما تكون البيانات المدخلة صحيحة لانها عادة تاتي من اجهزة قياس من نوع او اخر، لذلك فالمعلومات الخارجة تشمل على اخطاء ايضا كما ان هناك اخطاء اخرى تاتي من الطريقة الحسابية وفيما ياتي انواع هذه الاخطاء.

7-2 انواع الاخطاء Types of Errors:

لنفرض ان x يمثل العدد المضبوط وان $\hat{x}$ يمثل القيمة التقريبية

للعدد x فان الخطاء المطلق يعرف كما ياتي:

$$E = \mp(x - \hat{x})$$

كما ان الخطأ النسبي يعرف بالعلاقة

$$E_r = \left|\frac{E}{x}\right| = \left|1 - \frac{x}{\hat{x}}\right|$$

وفيما ياتي انواع تلك الاخطاء.

1. اخطاء التقريب Round – off Errors.

عندما يقرب عدد معين لعدد من المراتب وخاصة في بعض العمليات الحسابية عندما لا تستوعب الة الحساب المستخدمة لمراتب ذلك الرقم فمثلا يقرب العدد 1234567 الى اربعة مراتب كما يلي 123500 وقد تكون هذه الاعداد كسورا وهذه الكسور قابلة الى القطع فمثلا النسبة $\frac{1}{3}$ تكتب في بعض الاحيان 0.333 او 0.33.

2. اخطاء الاقتطاع.

خطأ الاقتطاع ينشأ عن استبدال عملية منتهية بعملية لا نهائية مثلا ايجاد تكامل معادلة تفاضلية باستخدام معادلة فروق التي سيتم ذكرها لاحقاً في هذا الفصل. وحساب تكامل محدود بتقريب مجموعة.

3. الاخطاء التي تنتج من الانسان او الالة.

نتوقع في جميع العمليات العددية ان تحدث اخطاء اما من خلال نقل المعلومات او الحصول على نتائج خاطئة من تنفيذ عمليات حسابية وحتى الجداول ممكن ان تحتوي على اخطاء اما عند استخدام الحاسبات الالكترونية فقد يحدث خطأ يمكن التخلص منها او تقليلها من خلال التدقيق خاصة اذا كان سبب الاخطاء هو الانسان نفسه اما الاخطاء التي سببها الحاسبات فليس هناك سيطرة عليها.

مثال 1-7:

اذا ضربنا قيمة معينة في عدد ثم قسمنا على نفس العدد أي

$$(0.76\times0.06)\div0.06=0.76$$

ولكن لو اجرينا التقريب في كل عملية فلا تنتج القيمة الاصلية

$$(0.76\times0.06)\div0.06=0.05\div0.06=0.83\neq0.76$$

ويكون مقدار الخطأ الناتج من التقريب هو

$$E=0.83-0.76=0.07$$

مثال2-7:

لو اردنا حساب $e^{1/3}$ لخمسة حدود فقط من مفكوك الدالة e^x وان الحسابات تجري لاربعة مراتب عشرية اوجد قيم الاخطاء.

$$f(x)=e^x \qquad , \qquad x=\frac{1}{3}$$

فلو جعلنا $x=0.3333$ كتقريب للقيمة $\frac{1}{3}$ فهناك خطأ ابتدائي في الدالة $f(x)$ أي ان

$$\begin{aligned} E_1 &= e^{0.3333} - e^{1/3} \\ &= e^{0.3333} - e^{0.3333333} \\ &= e^{0.3333}\left(1 - e^{0.0000333}\right) = -0.0000465196 \end{aligned}$$

وعند حساب e^x لخمسة حدود الاولى أي

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{(1/3)^2}{2!} + \frac{(1/3)^3}{3!} + \frac{(1/3)^4}{4!}$$

$$= 1.396090535$$

وان

$$f(0.3333)=1+0.3333+\frac{(0.3333)^2}{2!}+\frac{(0.3333)^3}{6}+\frac{(0.3333)^4}{12}$$

$$=1.396043828$$

$$E_2=1.396090535-1.396043828=0.000046707$$

الخطأ الكلي =

$$=E_1+E_2=-0.0000465196+0.000046707$$

$$=0.000000188$$

7-3 الاستكمال Interpolation:

يمثل تقريب دالة عامة بطائفة من دوال ابسط الذي يسهل اجراء بعض العمليات الحسابية التي نحتاجها كالتفاضل والتكامل، كما ان هذا التقريب له فوائد اخرى يمكن توضيحها في الامثلة التالية:

مثال3-7:

اذا كانت لدينا دالة $y=f(x)$ عند بعض النقاط أي ان

$y_I= f(x_i);\ i=0,1,2,..,n$

وطلب منا تعيين قيمة الدالة (قيمة y) عند نقطة x_o مثلا غير موجودة ضمن القيم العلوية المعطاة:

مثال4-7:

لو كان لدينا حاجة لايجاد قيمة sin(30.5) وان هذه القيمة غير موجودة في الجداول بينما نجد ان Sin(30) و Sin(31) معلومة فيمكن تخمين تلك القيمة بمتوسط القيمتين 30 و31 أي

$$\frac{\sin(30)+\sin(31)}{2}=0.50751904$$

وهذه القيمة غير مطابقة للقيمة الحقيقية. ولكن لو استخدمنا قيم اكثر ووجدنا تقريب منها اقرب الى الحقيقة من متوسط القيمتين.

ان اكثر الدوال استخداما للتقريب هي متعددة الحدود (polynomials) والدوال المثلثية والدوال الاسية النسبية ولكن متعددةالحدود هي اكثرها استخداما.

مثال5-7:

اذا كانت y=f(x) معلوم قيمها عند النقاط المبينة في الجدول التالي

X	1	2	4	5
F(x)	0	2	12	21

احسب قيمة f(3) باستخدام الاستكمال التربيعي للنقاط 1,2,4 والاستكمال التربيعي للنقاط (2،4،5) باستخدام الاستكمال التربيعي

للنقاط 1،2،4

نفرض ان

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$$

$$f(1) = o = a_o + a_1 + a_2 \text{ ....} (1)$$

$$f(2) = 2 = a_o + 2a_1 + 4a_2 \text{ ....} (2)$$

$$f(4) = 12 = a_o + 4a_1 + 16a_2 \text{ ....} (3)$$

وبحل هذه المعادلات انيا نحصل على

$$a_o = o,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1$$

أي ان

$$f(x) = -x + x^2$$

$$\therefore f(3) = -3 + 9 = 6$$

وباستخدام الاستكمال التربيعي للنقاط 2،4،5

نفرض ان

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$$

$$f(2) = 2 = a_o + 2a_1 + 4a_2 \text{ ....} (1)$$

$$f(4) = 12 = a_o + 4a_1 + 16a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$f(5) = 21 = a_o + 5a_1 + 25a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

وبعد حل المعادلات انيا نحصل على

$$a_o = \frac{8}{3}, a_1 = -3, a_2 = \frac{4}{3}$$

$$f(3) = \frac{8}{3} - 9 + \frac{4}{3}(9) = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3} = 5.667$$

وباستخدام النتيجتين السابقتين يمكن ان نقدر

$$f(3) = \frac{6 + 5.667}{2} = 5.83$$

7-4 الصيغ المستخدمة في الاستكمال:

هناك العديد من الصيغ التي تستخدم متعدد الحدود منها:

7-4-1 صيغة لاكرانج Lagrange Formula:

افرض ان $f_k=f(x_k)=p(x_k)$ لجميع قيم $(k=0,1,2,..,n)$ وان هناك كثير حدود $L_k(x)$ من الدرجة n وان $x=x_j$ فان

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

فان $L_k(x)$ يسمى معاملات لاكرانج والمعرفة كما ياتي:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

وان

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f_k$$

مثال6-7:

اذا كانت كثير الحدود للدالة f(x) المعرفة في الجدول التالي:

X	1	3	4	6
F(x)	2	10	15	8

فيمكن الحصول على متعدد الحدود f(x) كما يلي:

$$L_o(x) = \frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} = -\frac{1}{30}(x-3)(x-4)(x-6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-4)(x-6)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(4-1)(4-3)(4-6)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-3)(x-6)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)} = \frac{1}{30}(x-1)(x-3)(x-4)$$

وان

$$P(x)=-\frac{1}{30}(x-3)(x-4)(x-6)\times 2+\frac{1}{6}(x-1)(x-4)(x-6)\times 10$$

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-3)(x-6)\times 15+\frac{1}{30}(x-1)(x-3)(x-4)\times 8$$

أي ان

$$P(x)=-0.60000x^3+5.4x^2-9.36667x+6.6$$

مثال7-7:

من الجدول التالي للدالـة f(x) قـدر قيمـة f(0.6) باسـتخدام صـيغة لاكرانج الاستكمالية

X	0.4	0.5	0.7	0.8
F(x)	-.916291	-.693147	-.356675	-.233144

$$L_o(0.6)=\frac{(0.6-0.5)(0.6-0.7)(0.6-0.8)}{(0.4-0.5)(0.4-0.7)(0.4-0.8)}=-\frac{1}{6}$$

$$L_o(0.6)=\frac{(0.2)(-0.1)(-0.2)}{(0.1)(-0.2)(-0.3)}=-\frac{2}{3}$$

$$L_2(0.6)=\frac{2}{3}\quad L_3(0.6)=-\frac{1}{6}$$

$$f(0.6)=\left(-\frac{1}{6}\right)(-0.916291)+\frac{2}{3}(-0.693147)$$
$$+\frac{2}{3}(-0.356675)-\frac{1}{6}(-0.233144)=-0.509975$$

7-4-2 جداول الفروق Differences table:

تعتبر الفروق من العوامل المهمة في ايجاد الاستكمال والتقريب لقيم الدالة f(x) وهي على نوعين هما:

1. الفروق الامامية Forward differences:

نفرض ان مجموعة النقاط مرتبة بحيث ان المسافة بين أي نقطتين متتاليتين ثابتة وتساوي h أي ان

$$x_1 = x_o + h$$
$$x_2 = x_1 + h = x_o + 2h$$
$$x_i = x_o + ih \qquad i = 0,1,2,\ldots\ldots,n$$

فيعرف معامل الفروق الامامية Δ بالعلاقة التالية:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

أي ان

$$\Delta f_o = f_1 - f_o$$
$$\Delta f_1 = f_2 - f_1$$

اما الفروق الامامية الثانية $\Delta^2 f$ تعرف بالعلاقة

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x))$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[f(x+h) - f(x)]$$

$$= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$= f(x+2h) - f(x+h) - [f(x+h) - f(x)]$$

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

وبنفس الاسلوب يمكن ايجاد $\Delta^3 f(x)$ وبشكل عام فان

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta\left(\Delta^n f(x)\right)$$

فاذا استخدمنا $y_i=f_i=f(x_i)$ فان

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i)$$

وبشكل عام فان

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

وعنـد وضـع تلـك الفـروق في جـدول يـسمى بجـدول الفـروق

(difference table) لقيم y المعطاة:

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
x_o	y_o					
		Δy_o				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_o$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_o$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_o$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_o$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

مثال 8-7

اكتب جدول الفروق الامامية للقيم التالية:

X	2	3	4	5	6
F	5	10	17	26	37

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3
2	5			
		5		
3	10		2	
		7		0
4	17		2	
		9		0
5	26		2	
		11		
6	37			

2. الفروق الخلفية Backward differences

اذا كانت (x_i, f_i) تمثل النقاط المعرفة، فان الفروق الخلفيـة الاولى ∇ والثانية ∇^2 ومن المرتبة k هي ∇^k تعرف كالاتي:

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(\nabla f_i - f_{i-1}) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$

وان

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

واذا استخدمنا $f_i = y_i$ فان

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}$$

وعند وضع تلك الفروق في جدول يسمى جـدول الفـروق الخلفيـة لقيم y المعطاة وكما يأتي:

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
x_0	y_0					
		Δy_1				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_2$			
		Δy_2		$\Delta^3 y_3$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_4$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_4$		$\Delta^5 y_5$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_4$		$\Delta^4 y_5$	
		Δy_4		$\Delta^3 y_5$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_5$			
		Δy_5				
x_5	y_5					

مثال9-7:

اوجد الفروق الخلفية $\nabla^3 y_3, \nabla^2 y_2, \nabla y_1$ من جدول القيم التالية:

X	2	3	4	5	6
F	5	10	17	26	37

$$\nabla y_4 = y_4 - y_3 = 37 - 26 = 11$$

$$\nabla^2 y_2 = \nabla y_2 - \nabla y_1 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_o) = (17 - 10) - (10 - 5)$$
$$= 7 - 5 = 2$$

$$\nabla^3 y_4 = \nabla^2 y_4 - \nabla^2 y_3$$
$$= (\nabla y_4 - \nabla y_3) - (\nabla y_3 - \nabla y_2)$$
$$= \nabla y_4 - 2\nabla y_3 + \nabla y_2$$
$$= 11 - 2(26 - 17) + (17 - 10) = 11 - 18 + 7 = 0$$

7.4.3 صيغة نيوتن – كريكوري

اذا كانت قيم x متساوية المسافات، ولايجاد تقدير الدالة f(x) عند قيمة غير معلومة فنجد متعدد الحدود p(x) للقيم المعلومة باستخدام صيغة نيوتن وهي على نوعين هما:

1. صيغة نيوتن للفروق الامامية Newtons Forward Formula:

تستخدم هذه الصيغة لايجاد متعدد حدود p(x) كتقريب للدالة f(x) عندما تكون قيم $x_o, x_1, \ldots, x_n$ متباعدة بمسافة ثابتة h أي ان $x_I - x_{i-1} = h$

فالامكان كتابة صيغة نيوتن للفروق الامامية كما ياتي:

$$p(x)=y_o+(x-x_o)\frac{\Delta y_o}{1!h}+(x-x_o)(x-x_1)\frac{\Delta^2 y_o}{2!h^2}+....+....+$$

$$(x-x_o)(x-x_1)....(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n y_o}{n!h^n}$$

مثال10-7:

اوجد القيمة التقريبية للدالة f(x) عندما x=3.4,x=2.5 للقيم المعلومة في الجدول التالي:

X	2	3	4	5	6
F	5	10	17	26	37

ان جدول الفروق الامامية هو:

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
2	5				
		5			
3	10		2		
		7		0	
4	17		2		0
		9		0	
5	26		2		
		11			
6	37				

وبتطبيق صيغة نيوتن نحصل على متعددة الحدود التالية:

$$p(x) = 5 + (x-2)\frac{5}{1!\,1} + (x-2)(x-3)\frac{2}{2!\,1^2} + (x-2)(x-3)(x-4)\frac{0}{3!\,1^3} + 0$$

$$= x^2 + 1$$

أي ان

$p(2.5) = (2.5)^2 + 1 = 7.25$

$p(3.4) = (3.4)^2 + 1 = 12.56$

مثال **11**-7:

اوجد متعددة الحدود من الدرجة الثالثة لجدول الفروق الامامية التالي:

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
4	1			
		2		
6	3		3	
		5		4
8	8		7	
		12		
10	20			

وبتطبيق صيغة نيوتن نحصل على

$$p(x) = 1 + \frac{2}{2}(x-4) + \frac{3}{8}(x-4)(x-6) + \frac{4}{48}(x-4)(x-6)(x-8)$$

$$p(x) = \frac{1}{24}\left(2x^3 - 27x^2 + 142x - 240\right)$$

2. صيغة نيوتن للفروق الخلفية Newton's Backward Formula:

لايجاد القيمة التقريبية لـ f(x) عندما تكون x قرب نهاية الجدول او (x_{n-1},x_n) فاننا نستخدم صيغة نيوتن الخلفية حيث ان القيمة التقريبية تكون اقرب الى القيمة الحقيقية من صيغة نيوتن الامامية. وان هذه الصيغة مشابهة للصيغة السابقة (صيغة نيوتن الامامية) بالتعويض عن Δ بـ ∇ وان هذه الصيغة يمكن كتابتها كما يلي:

$$Q(x) = y_n + (x - x_n)\frac{\nabla y_n}{1!h} + (x - x_n)(x - x_{n-1})\frac{\nabla^2 y_n}{2!h^2} + ...$$

$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})....(x - x_1)\frac{\nabla^n y_n}{n!h^n}$$

مثال 12-7:

اوجد القيمة التقريبية لـ cos (0.25) عندما تكون قيم Cos(x) المعلومة هي الموضحة في الجدول التالي:

X	0	0.1	0.2	0.3
Cos(x)	1	0.995	0.98007	0.95534

يتضح ان القيمة 0.25 تقع بين (0.2,0.3) أي قرب نهاية الجدول لذلك نستخدم صيغة نيوتن الخلفية، اذ ان h=0.1 ويجب اولا تكوين جدول الفروق الخلفية:

x	cos(x)	∇	∇^2	∇^3
0	1			
		-0.005		
0.1	0.995		-0.00993	
		-0.01493		0.00013
0.2	0.98007		-0.0098	
		0.02473		
0.3	0.95534			

وبتعويض هذه الفروق في الصيغة

$$Q(x)=y_3+(x-x_3)\frac{\nabla y_3}{h}+(x-x_3)(x-x_2)\frac{\nabla^2 y_3}{2!h^2}$$

$$+(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)\frac{\nabla^3 y_3}{3!h^3}$$

$$Q(x)=0.95534+(x-0.3)\frac{-0.02473}{0.1}+(x-0.3)(x-0.2)\frac{-0.0098}{2!(0.1)^2}$$

$$+(x-0.3)(x-0.2)(x-0.1)\frac{0.00013}{3!(0.1)^3}$$

$$Q(x)=x^3-0.503x^2+0.00008x+1$$

وبالتعويض عن $x = 0.25$ نحصل على

Q(0.25) = 0.96891

أي ان

Cos (0.25) ≈0.96891

علما بان القيمة المضبوطة هي 0.96891

مثال13-7:

الجدول التالي يعطي بعض النقاط على منحني الدالة $y= f(x)$

X	4	6	8	10
y	1	3	8	20

اوجد $f(9)$ باستخدام صيغة نيوتن الخلفية

نجد جدول الفروق الخلفية

x	y	∇	∇^2	∇^3
4	1			
		2		
6	3		3	
		5		4
8	8		7	
		12		
10	20			

$h=2$ وبتطبيق صيغة نيوتن الخلفية

$$Q(x)=y_3+(x-x_3)\frac{\nabla y_3}{h}+(x-x_3)(x-x_2)\frac{\nabla^2 y_3}{2!h^2}+(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)\frac{\nabla^3 y_3}{3!h_3}$$

$$=20+(x-10)\frac{12}{2}+(x-10)(x-8)\frac{7}{2.2^2}+(x-10)(x-8)(x-6)\frac{4}{3!\,2^3}$$

$$Q(x)=20+\frac{12}{2}(x-10)+\frac{7}{8}(x-10)(x-8)+\frac{4}{48}(x-10)(x-8)(x-6)$$

أي ان

$$f(9)=Q(9)=\frac{103}{8}=12.875$$

تمارين الفصل السابع

1. اوجد مقدار الخطأ لحساب قيمة $f\left(\sqrt{2}-1\right)^6$ بالتعويض عن $\sqrt{2}=1.4$

2. اذا كانت لديك الدالة $f(x)=x^3-6x^2+3x-0.149$ احسب قيمة $f(x)$ عندما $x=4.71$ لثلاث مراتب عشرية واحسب قيمة الخطأ.

3. اوجد ناتج الحسابات التالية:

أ. بالضبط.

ب. بالتقريب لثلاثة ارقام ثم حدد الخطأ

a) $14.1 + 0.0981$

b) $(164+0.913) - (143 - 21)$

c) 0.0218×179

d) $(164 - 143) + (0.913 - 21)$

4. احسب تقريب لقيمة f(1.25) اذا علمت ان

$$f(0) = 1, f(1) = 6, \ f(3) = 34 \ , f(7) = 162$$

5. اوجد متعددة الحدود من الدرجة الثالثة التي تاخذ القيم ادناه:

X	0	1	2	4
y	1	1	2	5

6. استخدم صيغة لاكرانج لايجاد كثيرة حدود تكعيبية للجدول التالي ثم احسب قيمة كثيرة الحدود عند x = 2,5.

X	0	1	4	6
y	1	-1	1	-1

7. اثبـــــت ان $y_3 = y_o + 3\Delta y_o + 3\Delta^2 y_o + \Delta^3 y_o$ اذا كـــــان

$$y_1 = y_o + \Delta y_o$$

8. استخدم صيغة نيوتن الامامية لايجاد متعدد حدود من الدرجة الثالثـة اذا توفرت لديك القيم التالية:

X	3	4	5	6
y	6	24	60	120

9. اوجد متعدد حدود من الدرجة الثالثة باستخدام صيغة نيوتن الخلفيـة للجدول التالي:

X	4	6	8	10
y	1	3	8	20

10. استخدم صيغة نيوتن الخلفية لايجاد متعددة حدود من الدرجة الرابعة للقيم

X	1	2	3	4	5
y	1	-1	1	-1	1

ثم اوجد تقريب القيمة (3.5)

11. استخدم صيغة نيوتن الامامية لايجاد متعدد حدود من الدرجة الثالثة للتمرين (10) واوجد تقريب القيمة (3.5) وقارن بين نتيجة التقريب بين صيغتي نيوتن.

12. اثبت ان

$$y_n = \sum_{i=o}^{n} C_i^n \Delta^i y_o$$




الفصل الثامن
حل المعادلات الخطية واللاخطية

حل المعادلات الخطية واللاخطية

8-1 حل المعادلات اللاخطية Non- linear Equations:

المعادلات اللاخطية هي المعادلات التي يكون فيها على الاقل حد واحد من الدرجة الثانية او اكثر او دوال اسية او مثلثية او لوغارتمية. مثل

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x - \text{Sin } x = 0$$

$$e^x - x = 0$$

والطرق المعروفة التي تستخدم صيغاً مباشرة تؤدي الى حل المعادلة حلا مضبوطا هي طرق لا تطبق الا على عدد محدود جدا من المعادلات. وسنتناول بعض الطرق العددية التي تسمى بالطرق التكرارية والتي تؤدي عادة الى ايجاد جذور (يسمى a جذر المعادلة $f(x)=0$ اذا كان $f(a)=0$) قريبة جدا من الجذور المضبوطة وفي احيان تؤدي الى هذه الجذور المضبوطة. حيث تفترض قيمة تقريبية ابتدائية x_0 ثم يكرر استخدام الصيغة عدة مرات للحصول على قيم اقرب الى الجذر المضبوط.

8-1-1 طرائق الحل:

هناك عدد كبير من طرائق ايجاد جذور المعادلات اللاخطية وسنذكر هنا اكثر الطرق استخداما.

1. مبرهنة القيمة الوسطى Mean Value theorem.

لو كانت لدينا الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق ،كما ان هناك نقطتان (a,b) لهذه الدالة فان

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{(8-1)}$$

واذا كانت لدينا قيمة وسطى بين b,a ولتكن θ فان

$$f'(\theta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

من المعلوم ان اغلب طرائق حل المعادلات اللاخطية نحصل منها على صيغة تكرارية هي

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{k} \qquad n=0,1,2,........$$

وان احدى الطرق التي تستخدم k العلاقة (8-1) لنظرية القيمة والتي تسمى بطريقة القاطع المتغير (Variable Secant) اذ تصبح قيمة

الجذر الذي سيكرر للحصول على قيمة قريبة من الجذر الحقيقي هو:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

وبذلك تصبح الصيغة كما ياتي:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

مثال8-1:

جد الجذر الواقع في المجال (0.5,1) للمعادلة اللاخطية

$$x + e^{-2x} - 1 = 0$$

بافتراض ان $x_o = 0.5$ وان $x_1=0.9$ ويمكن اخذ أي نقطتين ضمن المجال اعلاه

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_o}{f(x_1) - f(x_o)}$$

$$= 0.9 - f(0.9)\frac{(0.9) - (0.5)}{f(0.9) - f(0.5)}$$

اذ ان

$$f(0.9) = 0.9 + e^{-1.8} - 1 = 0.065298888$$

$$f(0.5) = 0.5 + e^{-1} - 1 = -0.132120558$$

$$x_2 = 0.9 - 0.065298888.\frac{0.4}{0.197419446} = 0.7677$$

وبما انه

$$f(0.7677) = -0.016933$$

أي ان القيمة لا تساوي صفر وعليه يجب ايجاد قيمة جديدة هي x_3 وتستخدم هنا $x_2=0.7677$ و $x_1=0.9$ وعند التعويض نجد ان $x_3=0.79494$ واذ ان $f(0.7677) \neq 0$ ونستمر بتوليد قيم جديدة والجدول الاتي يوضح هذه العمليات:

X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	F(m)
0.5	0.9	0.7677	-0.016933
0.9	0.76770	0.79494	-0.001103
0.7677	0.79494	0.79685	0.0000231
0.79494	0.79685	0.79681	0.00000003

أي ان الجذر هي 0.79681 ولكن لو اخذنا $x_0=0.6$ $x_1=0.8$ فسنجد الجذر باسلوب اسرع من القيمتين التي اخترناها.

2. طريقة التكرار Iterative Method:

تستخدم هذه الطريقة لحل المعادلات $f(x)=0$ وذلك بوضع المعادلة في صورة خاصة هي:

$$x = g(x)$$

وان المعادلة $f(x)=0$ يمكن وضعها بالصورة الخاصة بعدد كبير من الطرق فمثلا المعادلة $x^3-2=0$ يمكن وضعها بالطرق التالية:

$$x = x^3-2+x \qquad (1)$$

$$x = \frac{2-x^3+5x}{5}$$

$$x = \frac{2}{x^2}$$

ثم نبدأ بقيمة مناسبة $x=x_0$ وكون سلسلة من تقريبات باستخدام العلاقة

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad n = 0,1,2,....$$

ومن الواضح انه اذا كان لهذه المتتالية $x_0, x_1, x_2,....$ غاية (limit) هو m فان m يكون جذر لمعادلة $x = g(x)$ لان $m = g(m)$

مثال3-8:

اوجد الجذر الحقيقي للمعادلة $x^3-2=0$ بطريقة التكرار.

$$x = x^3 - 2 + x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x = \frac{2 - x^3 + 5x}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وباختيار القيمة الابتدائية $x_o=1.2$

$$x_{n+1} = x_n^3 - 2 + x_n$$

$$x_o = 1.2$$

$x_1 = (1.2)^3 - 2 + 1.2 = 0.928 \ldots\ldots\ldots$ باستخدام (1)

$$x_2 = (0.928)^3 - 2 + 0.928 = -0.273$$

$$x_3 = -2.293$$

$$x_4 = -16.349$$

$$x_{n+1} = \frac{2 - x_n^3 + 5x_n}{5}$$

$$x_o = 1.2$$

$x_1 = \dfrac{2 - (1.2)^2 + 5(1.2)}{5} = 1.2544 \ldots\ldots\ldots$ باستخدام (2)

$$x_2 = 1.2596$$

$$x_3 = 1.2599$$

$$x_4 = 1.25992$$

ونجد ان القيم المثالية تتقارب فعلاً نحو الجذر الصحيح للصيغة (2)

$$m = \sqrt[3]{2}$$

3. طريقة نيوتن – رافسون Newton – Raphson Method:

لحل المعادلة بهذه الطرقة نضع المعادلة اولاً بالصورة $f(x)=0$ ونوجد قيمة تقريبية ابتدائية x_o بالقرب من الجذر الصحيح واقعاً بين القيمتين $x=b$ ، $x=a$ ثم نوجد تقريبات متتالية $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ وحسب العلاقات التالية:

$$\Delta=\frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$$

$$x_1=x_o-\Delta=x_o-\frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

وبشكل عام فان:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots$$

مثال 4-8:

اوجد لاربعة ارقام جذراً للمعادلة $x^4-x=10$ بالقرب من $x=2$

بطريقة نيوتن – رافسون.

$$f(x) = x^4 - x - 10 = 0$$

$$f(0) = -10 < 0$$

$$f(1) = -10 < 0$$

$$f(2) = 4 > 0$$

أي ان المعادلة لها جذر بين $x=2$ و $x=1$ وتتوقع ان يكون اقرب الى $x=2$ والتي تمثل القيمة الابتدائية x_0 .

$$f(x) = x^4 - x - 10$$

$$f'(x)=4x^3-1$$

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - x_n - 10}{4x_n^3 - 1} = \frac{3x_n^4 + 10}{4x_n^3 - 1}$$

وبتطبيق الصيغة مرات عديدة نحصل على:

$x_1 = 1.871$ $\quad x_2 = 1.85578$ $\quad x_3 = 1.855585$

$x_4 = 1.85558452522$

وان القيمة المطلقة للفارق بين القيمتين المتتاليتين $|x_n - x_{n-1}|$ اصبح صفراً أي

$$|x_4 - x_3| = 0.00000047478$$

مثال 5-8:

اوجد بطريقة نيوتن – رافسن اصغر جذر للمعادلة $e^{-x} = \sin x$ ولثلاثة ارقام عشرية.

الحل:

برسم تقريبي للمنحنين $y = \sin x$ و $y = e^{-x}$ نجد ان القيمة التقريبية للاحداثيين السيني لنقطة التقاطع التي تقابل اصغر جذر للمعادلة المعطاة هي $(x_o = 0.6)$

$$f(x) = e^{-x} - \sin x$$

$$f'(x) = e^{-x} - \cos x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{-x_n} - \sin x_n}{-e^{-x_n} - \cos x_n}$$

$$x_o = 0.6$$

$$x_1 = 0.5885$$

$$x_2 = 0.58853274$$

ونتوقف عن تطبيق الصيغة التكرارية لان:

$$\Delta = |x_2 - x_1| = |0.58853274 - 0.5885| = 0.00000327$$

وهي كمية صغيرة جداً تقترب من الصفر

4. طريقة التنصيف Bisection Method:

لنفرض لدينا الدالة المستمرة $f(x)$ معرفة في الفترة $[a,b]$ ونفـرض ان $f(a) = f(b)$ لهـا اشـارتان مختلفتـان فتوجـد قيمـة p اذ ان $a < p < b$ بحيث ان $f(p) = 0$ والمطلوب ايجاد الجذر p .

في البدايـة نـضع $b_1 = b$ و $a_1 = a$ ونفـرض ان p_1 هـي النقطـة المتوسطة في الفترة $[a, b]$ أي ان

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

فاذا كانت $f(p) = 0$ فـان $p = p_1$ والا فـان إشـارة $f(p_1)$ هـي نفـس اشارة اما $f(a_1)$ او $f(b_1)$. فاذا كان $f(p_1), f(a_1)$ لهـما نفـس الاشـارة فـان قيمة p تقع بين القيمتين $[p_1, b_1]$ فنضع $b_2=b_1$ و $a_2 = p_1$. اما اذا كانت اشارة $f(p_1)$ هي نفس اشـارة $f(b_1)$ فـان p تنتمـي الى القيمتـين $[a_1, p_1]$ وحينئذ نضع $a_2 = a_1 , b_2 = p_1$ ونعيد تطبيق العمليـة عـلى الفـترة $[a_2, b_2]$ ونتوقف احد الشروط التالية:

$$|p_n - p_{n-1}| < \in \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \in \quad p_n \neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$|f(p_n)| < \in \quad ....(3)$$

$$\frac{b_n - a_n}{|a_n|} < \in \quad a_n \neq 0 \quad ....(4)$$

اذا ان $\frac{b-a}{2} < \in \quad , \in > 0$

مثال 6-8:

أوجد جـذر المعادلـة $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ للفـترة $[1, 2]$ بحيـث توقف التكرار عندما يتحقق الشرط

$$\frac{b_n - a_n}{|a_n|} < 5 \times 10^{-4}$$

$f(1) = -5 \quad ; \quad f(2) = 14$

وبتطبيق خطوات الطريقة نحصل على قيم الجدول التالي:

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	1	2	1.5	2.375
2	1	1.5	1.25	-1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	-0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	-0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	-0.03215
9	1.36328125	1.367185	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	-0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	-0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	-0.00396

ونلاحظ انه بعد (12) تكرار فان

$$p_{12} = 1.364990235$$

أي ان الخطأ هو:

$$\Delta = |p - p_{12}| \leq |b_{12} - a_{12}| = 0.000488281$$

وبما ان

$$\frac{|b_{12} - a_{12}|}{|a_{12}|} = 3.6 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4}$$

8.2 حل المعادلات الخطية Linear Equations:

اذا كان لدينا النظام الخطي التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n$$

الذي يضم m من المعادلات في n من المجاهيل، ويمكن كتابة هذا النظام بصيغة المصفوفات كما ياتي:

$$A_X = b \ldots \qquad 8.2$$

اذ ان

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & .... & a_{2n} \\ a_{ml} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

هناك نوعين من الحلول للنظام 2-8 هي:

8ـ2ـ1 **الطرائق المباشرة للحل** Direct Method of solution:

8-2-1-1 طريقة كاوس للخلف Gauss Elimination:

وهي ابسط انواع الطرق التي يمكن الحصول منها على حل لمنظومة المعاملات الخطية فاذا كتبنا النظام بالصورة التالية التي تسمى بالمصفوفةالمزيّدة Augmented Matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ml} & a_{m2} & .. & a_{mn} & : & b_n \end{pmatrix}$$

ونجعل العناصر $a_{21}, a_{31} .. a_{m1}$ مساوية للصفر وذلك بضرب عناصر الصف الاول في العنصر $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ وطرحها من عناصر الصف الثاني.

وضرب عناصر الصف الاول في العنصر $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ وطرحه من الصف الثالث وهكذا لجميع الصفوف لنحصل على النظام.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & : & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & : & b'_2 \\ : & : & & & & : & : \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & : & b'_m \end{pmatrix}$$

وبنفس الاسلوب نحصل العناصر $a'_{32}\dots a'_{m3}$ اصفار بضرب عناصر الصف الثاني بالعنصر $\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ وطرح الناتج من الصف الثاني وهكذا لجميع الصفوف لنحصل على المصفوفة.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & : & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & : & d_2 \\ :0 & :0 & c_{33} & & : & : & : \\ : & : & : & & : & : & : \\ 0 & 0 & 0 & & c_{mn} & : & d_n \end{pmatrix}$$

وبذلك يصبح $c_n = \frac{d_n}{c_{mn}}$ وبالتعويض في باقي المعادلات نحصل على باقي المجاهيل والامثلة التالية توضح الطريقة:

مثال7-8:

اوجد حل منظومة المعادلات التالية بطريقة كاوس:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 9$$

$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3$$

ان المصفوفة المحدودة النظام المعادلات هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 0 \\ 3 & -1 & -2 & : & 9 \\ 4 & 3 & -3 & : & 3 \end{pmatrix}$$

بضرب عناصر الصف الاول في 3 وطرحها من عناصر الصف الثاني، كما نضرب عناصر الصف الاول في 4 وطرحها من عناصر الصف الثالث ينتج:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 9 \\ 0 & -5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

وبضرب عناصر الصف الثاني بـ $\frac{-5}{-7}$ أي $\frac{5}{7}$ وتطرح من عناصر الصف الثالث ينتج:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & -7 & -5 & : & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{7} & : & \frac{-24}{7} \end{pmatrix}$$

اذ ان

$$-\frac{24}{7}X_3 = -\frac{24}{7}$$

$$X_3 = 1$$

وان

$$-7x_2 - 5x_3 = 9$$

$$-7x_2 - 5 = 9$$

$$-7x_2 = 14 \Rightarrow x_2 = -2$$

وان

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

أي ان مجموعة الحل هو (2،-1،3).

مثال8-8:

اوجد حل منظومة المعادلات الخطية التالية بطريقة كاوس

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$5x_1 - 3x_2 - x_3 = 5$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 9$$

ان المصفوفة المحدودة لنظام المعادلات هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 5 & 3 & 1 & : & 5 \\ 2 & -1 & 2 & : & 9 \end{pmatrix}$$

نضرب عناصر الصف الاول في 5 ونطرحها من عناصر الصف الثاني كما نضرب عناصر الصف الاول في 2 ونطرحها من عناصر الصف الاول ينتج:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & -7 & -4 & : & -5 \\ 0 & -5 & 0 & : & 5 \end{pmatrix}$$

نضرب عناصر الصف الثاني في $\frac{-5}{-7}$ او $\frac{5}{7}$ ونطرح من عناصر الصف الثالث ينتج:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & -7 & -4 & : & -5 \\ 0 & 0 & \frac{20}{7} & : & \frac{60}{7} \end{pmatrix}$$

أي ان

$$\frac{20}{7}x_3 = \frac{60}{7} \Rightarrow x_3 = 3$$

وان

$$-7x_2 - 4x_3 = -5$$

$$-7x_2 - 12 = -5 \Rightarrow -7x_2 = 7 \Rightarrow x_2 = -1$$

وان

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - 2 + 3 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

أي ان مجموعة الحل هي (1،-1،3)

ملاحظة: ان طريقة كاوس لا يمكن استخدامها عندما يكون $a_{11}=0$ ويتم استخدام طريقة كاوس مع التحوير الجزئي partial pivoting وهي خارج نطاق هذا الكتاب.

2-1-2-8 طريقة كراوت وجولسكي Grout-Cholesky:

ان هذه الطريقة تعتمد على تحليل المصفوفة A الى حاصل ضرب عاملين مثلثين أي:

$$A = L . U$$

اذ ان $L=(l_{ij})$ هي مصفوفة مثلثية سفلى Lower triangular Matrix.

$U=(u_{ij})$ مصفوفة مثلثية عليا Upper triangular Matrix.

حيث تشترط طريقة كراوت ان تكون العناصر القطرية للمصفوفة U هي الواحد

$$u_{ii} = 1 \qquad i= 1,2,\ldots,n$$

في حين تشترط طريقة جولسكي ان تكون عناصر قطري المصفوفتين U , L متساوية.

$$L_{ii} = U_{ii} \qquad i= 1,2,\ldots,n$$

وفيما يلي اسلوب كلا الطريقتين

يقال للمصفوفة A بانها موجبة قطعاً (Positive Definite Matrix) اذا كانت مصفوفة متماثلة، وان قيمة X^TAY موجبة لايمتجه غير صفري Y.

1. ايجاد المصفوفات المثلثية.

فعند تطبيق طريقة جولسكي على مصفوفة موجبة قطعاً ينتج ان العناصر القطرية في L و U جميعها موجبة وان:

$$A = LU = LL^T$$

ويمكن حساب عناصر المصفوفة المثلثية السفلية L عمود بعد اخر حسب الترتيب بالصيغ التالية:

للعناصر غير القطرية

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{ij}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{kj}\right)$$

مثال9-8:

حلل المصفوفة A التالية بطريقة جولسكي

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$A=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}=\sqrt{4}=2$$

$$l_{21}=\frac{a_{21}}{l_{11}}=-\frac{1}{2}=-0.5$$

$$l_{31}=\frac{a_{31}}{l_{11}}=\frac{1}{2}=0.5$$

$$l_{22}=\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}=\sqrt{4.25-(-0.5)^2}=2$$

$$l_{32}=\frac{1}{l_{22}}(a_{32}-l_{31}l_{21})=\frac{1}{2}(2.75-0.5(-0.5))=1.5$$

$$l_{33}=\sqrt{a_{33}-l_{31}^2-l_{32}}=\sqrt{3.5-(0.5)^2-(1.5)^2}=1$$

وعليه فان:

$$L=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U=\begin{pmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ب. حل النموذج الخطي.

اذا كان المطلوب حل النظام الخطي Ax=b اذ ان A مصفوفة موجبة قطعاً، فبعد ايجاد الصورة.

$$A = LL^T$$

نحلل النظام الخطي الى

$$LL^Tx = b$$

وهذا يعني ان

$$Lz = b$$
$$L^Tx = z$$

وحل النظام المثلثي السابق بالتعويض الامامي مرة وبالتعويض الخلفي مرة اخرى أي:

لحل $Lz = b$ فان

$$z_1 = b_1 / l_{11}$$

$$Z_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}z_j\right], \quad i = 2,3,\ldots,n$$

ولحل النظام $L^T x = z$ فان

$$x_n = z_n / l_{nn}$$

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[z_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j\right] \qquad i = n-1, \ldots, 1$$

باعتبار ان $U = L^T$ اذ ان $u_{ij} = l_{ji}$

مثال10-8:

اوجد حل النموذج الخطي التالي بطريقة جولسكي

$$4x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 8$$

$$x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{8}x_3 = 6$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{8}x_2 + \frac{9}{16}x_3 = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 5/4 & 5/8 \\ 1/2 & 5/8 & 9/16 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{1} = \frac{1}{2}/2 = \frac{1}{4}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} = 1$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{31}.l_{21})$$

$$l_{32} = 1\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}} = \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4}}$$

$$l_{33} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad U = L' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ولايجاد قيم X نستخدم العلاقتين التاليتين:

$$Lz = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = \frac{8}{2} = 4$$

$$z_2 = 1\left(6 - \frac{1}{2}.4\right) = 4$$

$$z_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(4 - \sum_{j=1}^{2} l_{3j} z_j\right) = 2\left(4 - \frac{1}{4}.4 - \frac{1}{2}.4\right) = 2(4-1-2) = 2$$

اما قيم x فيمكن ايجادها حسب العلاقة التالية:

$$L^T x = z = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$x_2 = \frac{1}{1}\left(4 - \frac{1}{2}.4\right) = 2$$

$$x_1 \frac{1}{2}\left(4 - \sum_{j=2}^{3} l_{ji} x_j\right) = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{2}.2 - \frac{1}{4}.4\right) = \frac{1}{2}(4-1-1) = 1$$

وتتلخص خطوات الحل بطريقة كروات كما ياتي:

أ. أيجاد المصفوفات المثلثية:

نفرض ان المصفوفة A يمكن تحليلها بالصورة A = L.U اذ ان:

$$L = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ l_2 & d_2 & & \\ & l_3 & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & l_n & d_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u_1 & & & 0 \\ & 1 & u_2 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & u_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ B_2 & \alpha_2 & s_2 & & \\ & B_3 & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & s_{n-1} \\ & 0 & & B_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

اذ ان

$$\alpha_1 = d_1, B_i = l_i; \quad i = 2,3,....,n$$

$$\alpha_i = l_i u_{i-1} + d_i; \quad i = 2,3,....,n$$

$$S_i = d_I\, u_I \;; \quad i = 1,2,\ldots,n-1$$

ب. حل النظام الخطي ثلاثي القطر:

نفرض ان A مصفوفة ثلاثية القطر(هي مصفوفة مربعة متماثلة فيها عناصر القطر الرئيسي وعناصر قطران اخران اعداد حقيقية وباقي الاقطار اصفار) ويمكن تحليلها الى عامليها المصفوفات المثلثية L,U اذ ان:

$$Ax = b$$

$$LUx = b$$

نفرض ان

$$Ux = z \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$Lz = b \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

فنحل اولا النظام (2) ثم النظام (1) فلحل النظام (2) فان:

$$z_1 = \frac{b_1}{d_1}, \qquad z_i = \frac{1}{d_i}(b_i - l_i z_{i-1}); \qquad i = 2,3,\ldots\ldots,n$$

ولحل النظام (1) فان

$$X_n = Z_n$$

$$X_i = Z_i - u_i\, x_i + 1\ ; \qquad i = n-1, n-2, \ldots,1$$

مثال11-8:

افرض ان

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

اوجد حل هذه المصفوفة باستخدام طريقة كراوت

$$d_1 = \alpha_1 = 2$$

$$u_1 = s_1 / d_1 = -1/2$$

$$l_2 = B_2 = -1$$

$$d_2 = \alpha_2 - l_2 u_1 = 2 - (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = s_2 / d_2 = -1/(3/2) = -2/3$$

$$l_3 = B_3 = -1$$

$$d_3 = \alpha_3 - \frac{1}{3}u_2 = 2-(-1)(-2/3) = \frac{4}{3}$$

$$u_3 = s_3 / d_3 = -1/\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$l_4 = B_4 = -1$$

$$d_4 = \alpha_4 - l_4 u_3 = 2-(-1)\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وان حل النموذج الخطي هو

$$z_1 = b_1 / d_1 = \frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{1}{d_2}(b_2 - l_2 z_1) = \frac{1}{3/2}\left[0-(-1)\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{3}$$

$$z_3 = \frac{1}{d_3}(b_3 - l_3 z_2) = \frac{1}{4/3}\left[0-(-1)\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{4}$$

$$z_4 = \frac{1}{d_4}(b_4 - l_4 z_3) = \frac{1}{5/4}\left[1 - (-1)\left(\frac{1}{4}\right)\right] = 1$$

$$x_4 = z_4 = 1$$

$$x_3 = z_3 - u_3 x_4 = \frac{1}{4} - (-3/4) = 1$$

$$x_2 = z_2 - u_2 x_3 = \frac{1}{3} - (-2/3) = 1$$

$$x_1 = z_1 - u_1 x_2 = \frac{1}{2} - (-1/2) = 1$$

أي ان الحل للنظام هو:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

8.2.2 الطرائق التكرارية:

في الطرائق المباشرة نجري عدد محدد من العمليات الجبرية للوصول الى الحل المطلوب اما في الطرائق التكرارية فاننا نبدأ بتقريب اولي ثم نحاول تحسينه بعدد من المرات الى ان نصل الى حل دقيق. وتستخدم هذه الطرائق عند حل النظم الخطية الكبيرة أي التي تحوي عدد كبير من المعادلات او المجاهيل ومن هذه الطرق.

8-2-2-1 طريقة جاكوبي (التقريبات المتتابعة) Jacobi's Method:

تبدأ خطوات هذه الطريقة باعطاء تقديرات (تخمينات) اولية للمجاهيل (x_i) ومثلا $x_i^{(0)}$ ثم تعوض هذه القيم في منظومة المعادلات للحصول على قيم جديدة وهي $x_i^{(1)}$ وتعوض ايضا في مجموعة المعادلات للحصول على تقديرات جديدة هي $x_i^{(2)}$ والاخيرة تعوض ايضا ونستمر لحين لا نجد أي تغيير في قيم x_i . أي ان العلاقة التالية تمثل خلاصة العمليات التكرارية.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_j a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

لحين الحصول على الدقة المطلوبة بان تصبح قيم x ثابتة تقريبا.

مثال8-12:

استخدم خمسة تقريبات في ايجاد مجموعة الحلول لمنظومة المعادلات التالية بطريقة جاكوبي

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

$$-x_1 + 2x_2 = 3$$

نبدل المعادلتين الثانية والثالثة لان $a_{33}=0$ وتصبح المعادلات كما ياتي:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$

$$-x_1 + 2x_2 = 3 \quad \text{..........} (1)$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

ومن هذه العلاقات نجد ان

$$x_1 = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 \quad \text{..........} (2)$$

$$x_3 = 4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2$$

نختار متجه التقريبات الاولية الاتي:

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}\ x_2^{(0)}\ x_3^{(0)}\right)$$

$$= \left(1 \quad 1 \quad 1\right)$$

وبالتعويض في المعادلات السابقة (2) ينتج:

$$x_1^{(1)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$x_3^{(1)} = 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

أي ان

$$x^{(1)} = \left(2 \quad 2 \quad \frac{13}{4}\right)$$

وبالتعويض مرة اخرى في المعادلات السابقة (2) للمتجه $x^{(1)}$ ينتج:

$$x_1^{(2)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{4}\left(\frac{13}{9}\right) = \frac{15}{16}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(2) = \frac{5}{2}$$

$$x_3^{(2)} = 4 - \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{4}(2) = \frac{5}{2}$$

ونستمر بالتعويض التكراري فنحصل على جدول القيم التالي:

K	X_1	X_2	X_3
0	1	1	1
1	2	2	$\frac{13}{4}$
2	$\frac{15}{16}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$

K	X_1	X_2	X_3
3	$\frac{7}{8}$	$\frac{63}{32}$	$\frac{93}{32}$
4	$\frac{133}{128}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{393}{128}$
5	$\frac{519}{512}$	$\frac{517}{256}$	$\frac{767}{256}$

ونلاحظ ان التقريبات المحسوبة في التكرار الخامس تختلف عن الحل المضبوط (1،2،3) بحدود 1٪ ويمكن زيادة عدد التكرارات اكثر للحصول على الدقة المطلوبة.

ملاحظة: يمكن وضع مقياس معين لمعرفة افضل تقريب وهو:

$$E = A\,X^{(i)} - b$$

اذ ان $x^{(i)}$ هو اخر تقريب تم ايجاده فكلما كانت قيمة E مقتربة من الصفر كلما كان متجه التقريب اقرب الى الحل المضبوط.

مثال12-8:

استخدم طريقة جاكوبي لحل منظومة المعادلات التالية:

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$$

معتمدا اربعة تقريبات فقط

$$x^o = (1 \quad 1 \quad 1)$$

من المعادلات السابقة نجد ان

$$x_1 = 1 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3$$

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3$$

$$x_3 = \frac{9}{2} - x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

وبالتعويض الاولي ينتج

$$x_1^{(1)} = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$x_2^{(1)} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_3^{(1)} = \frac{9}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 4$$

$$x^{(1)} = (1 \quad 0 \quad 4)$$

$$x_1^{(2)} = 1 - \frac{1}{5}(4) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$x_2^{(2)} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(4) = -\frac{3}{2}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$$

$$x^2 = \left(\frac{1}{5} \quad , \quad -\frac{3}{2} \; , \quad \frac{7}{2}\right)$$

$$x_1^{(3)} = 1 - \frac{3}{5}\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{7}{2}\right) = 1 + \frac{9}{10} - \frac{7}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$x_2^{(3)} = 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{7}{4} = -\frac{17}{20}$$

$$x_3^{(3)} = \frac{9}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - \frac{1}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{71}{20}$$

8-2-2-2 طريقة كاوس – سيدال Gauss – Seidel Method:

لا تختلف هذه الطريقـة عـن سـابقتها (طريقـة جـاكوبي) كثـيرا. اذ ان احدث تقريب للمتغير الاول يستخدم في ايجاد تقريب المتغير الثاني والاخير يستخدم في تقريب المتغير الثالـث وهكـذا تكـرر هـذه العمليـة في حـين في الطريقة السابقة يتم ايجاد تقريبات جميع المتغيرات وتستخدم في التكرار الثاني للتقريب. وان من مميزات هذه الطريقة ان التقارب في هذه الطريقة اسرع من الطريقة السابقة وفيما ياتي العلاقات التي تستخدم في التقريب.

$$x_1^{(k+1)} = \left[b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] / a_{11}$$

$$x_2^{(k+1)} = \left[b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] / a_{22}$$

$$x_3^{(k+1)} = \left[b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j} x_j^{(k+1)} \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] / a_{33}$$

وبشكل عام فان قيمة المتغير x_i الجديدة في التكرار k+1 يحسب وفق العلاقة التالية:

$$x_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i=1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] / a_{ii} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

أي اننا نحتاج ايجاد تقريب واحد فقط لـ X_i وهي احدث قيمة قد حصلنا عليها لاننا نستخدم القيم الجديدة فقط.

مثال14-8:

استخدم طريقة كاوس – سيدال لحل نظام المعادلات في المثال (8-12)

$$x_1 = \frac{11}{4} - \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{4} x_3$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} x_1$$

$$x_3 = 4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2$$

وعند استخدام القيم الابتدائية $x^o(1 \quad 1 \quad 1) =$ فتعطينا التكرار الاول وهو:

$$x_1^{(1)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2$$

ويستخدم الاخير $x_1=2$ في ايجاد $x_2^{(1)}$ أي ان

$$x_2^{(1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

ويستخدم $x_2 = \frac{5}{2}$ ، $x_1=2$ في ايجاد $x_2^{(1)}$ أي ان

$$x_3^{(1)} = 4 - \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{19}{8}$$

اما التكرار الثاني فيكون:

$$x_1^{(2)} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}(\frac{5}{2}) - \frac{1}{4}\left(\frac{19}{8}\right) = \frac{29}{32}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{29}{32}\right) = \frac{125}{64}$$

$$x_3^{(2)} = 4 - \frac{1}{2}\left(\frac{29}{32}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{125}{64}\right) = \frac{783}{256}$$

كما يمكن اجراء التكرار الثالث لنحصل على الجدول التالي:

K	$\underline{X_1}$	$\underline{X_2}$	$\underline{X_3}$
0	1	1	1
1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{19}{8}$
2	$\frac{29}{32}$	$\frac{125}{64}$	$\frac{783}{256}$
3	$\frac{1033}{1024}$	$\frac{4095}{2048}$	$\frac{24541}{8192}$

تمارين الفصل الثامن

1. استخدم طريقة نيوتن- رافسن لايجاد جذر المعادلة $x= e^{-x}$ لاربعة ارقام عشرية.

2. استخدم طريقة التكرار لحل المعادلة $x + Ln = 0$ وابحث عن افضل صيغة بين الصيغ التالية:

$$x_{n+1} = -Ln\, x_n \quad \text{.........}(1)$$

$$x_{n+1} = e^{-x_n} \quad \text{.........}(2)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2} \quad \text{.........}(3)$$

3. استخدم الطريقة التكرارية لايجاد قيمة x_2 في الصيغتين التاليتين:

$$x_{i+1} = \frac{e^{x_1}}{3} \quad \text{.........}(1)$$

$$x_{i+1} = Ln(3x_i) \quad \text{.........}(2)$$

4. باستخدام طريقة نيوتن – رافسن اوجد جذرا للمعادلة $z^2 +1=0$ مستخدما القيمة الاولية $z_0=1+i$.

5. المعادلة التالية لها جذر واحد يقع بين القيمتين [1،2].

$$X^6 = x^4 + x^3 + 1$$

اوجد مقدار هذا الجذر لستة ارقام عشرية.

6. باستخدام طريقة التنصيف اوجد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[3]{25}$ لرقمين معنويين.

ملاحظة: اعتبر $f(x) = x^3-25$.

7. أي الفترتين [2،3]، [1،2] نضمن ان فيها جذرا المعادلة التالية:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$$

مستخدما طريقة التنصيف.

8. استخدم طريقة القاطع لايجاد جذر المعادلة ضمن المجال [2،3].

$$X^3-5x = 0$$

9. استخدم طريقة نيوتن – رافسون لايجاد جذر للمعادلة xLnx=1 لخمسة ارقام عشرية.

10. استخدم طريقة كاوس الخلفية لحل لمجموعة المعادلات التالية:

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0$$

11. طبق ثلاث خطوات من طريقة كاوس – سيدال لحل المعادلتين الاتيتين:

$$x_1 + 4x_2 = 6$$

$$5x_1 - 2x_2 = 19$$

استخدم القيم الابتدائية $x^{(0)} = (0 \quad 0)$

12. حل مجموعة المعادلات التالية بطريقة كاوس سيدال.

$$-2x_1 + x_2 = -1$$

$$x_3 - 2x_4 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

طبق تكرارين باستخدام القيم الاولية $x^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.

13. حلل كلا من المصفوفتين التاليتين الى عامليها المثلثين U , L بطريقة كروات بحيث يكون $l_{ii}=1$.

$$a=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 3 & 9\\ 3 & 3 & 5\end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix}2 & -1.5 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 4 & -4.5 & 5\end{pmatrix}$$

14. باستخدام طريقة جولسكي حلل المصفوفة A التالية الى حاصل ضرب مصفوفتين بالصورة $A=LL^T$ اذ ان L مصفوفة مثلثية سفلى.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

15. استخدم طريقة كروات لايجاد كل من النظامين الخطين التاليين:

$$\text{a)}\ \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0\\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -1\\ -x_2 + 2x_3 &= 1.5\end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3\\ -x_i + 2x_2 - x_3 &= -3\\ -x_2 + 2x_3 &= 1\end{aligned}$$

16. باتباع طريقة كراوت لحل النظام الخطي ثلاثي القطر اوجد حل النظام الخطي $Ax=b$ اذ ان:

A مصفوفة ثلاثية القطر (10×10) تعرف بالعلاقات التالية:

لجميع قيم i $a_{ii} = 2$

$$a_{i,i+1} = -1 = a_{i,i-1}; i = 2,3,\ldots,9$$

$$a_{12} = a_{10,9} = -1$$

اما المتجه b فيعرف بالعلاقات التالية:

$$b_1 = b_{10} = 1$$

$$b_i = 0 \, , \, i = 2,3,\ldots,9$$

17. اثبت ان طريقة جاكوبي وطريقة كاوس سيدال تتقارب لاي حل تقريبي ابتدائي عند حل النظام الخطي التالي:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

18. اوجد حل النظام الخطي التالي بطريقة جولسكي كع التقريب لثلاثة ارقام

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

19. اكتب النظام الخطي التالي في صورة مناسبة لتطبيق طريقة جاكوبي.

$$4x_1 - x_2 = 2$$

$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = 6$$

$$-x_2 + 4x_3 = 2$$

طبق ثلاثة تكرارات مبتدأ بالحل الصفري مستخدم دقة تصل الى خمسة ارقام.

20. اوجد حل النظام الخطي التالي $Ax = b$ باستخدام.

أ. طريقة جولسكي.

ب. طريقة كاوس- سيدال مبتدأ بالمتجه الصفري.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$




الفصل التاسع

التفاضل والتكامل العددي

Numerical Differentiation & Integration

9-1 التفاضل العددي Numerical Differentiation

9-2 التكامل العددي Numerical Inegration



التفاضل والتكامل العددي

9.1 التفاضل العددي Numerical Differentiation:

اذا كانت f(x) دالة لها قيم معلومة عند بعض النقاط في جدول ذو مسافات متساوية والمطلوب ان نجد مشتقة الدالة f(x) عند احدى نقاط الجدول او نقطة غيرها.

9.1.1 صيغ المشتقات عند نقاط جدول البيانات:

هناك بعض الصيغ العددية التي تعطي قيما تقريبية للمشتقة الاولى والثانية والدرجات العليا عند احدى نقاط الجدول.

نحن نعلم من خلال العلاقات بين المعاملات الخطية في فصل الاستكمال ان

$$hD = \mathrm{Log}(1+\Delta)$$

اذ ان D هو معامل التفاضل $D = \frac{d}{dx}$ و Δ هو معامل الفروق الامامية

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\therefore D = \frac{1}{h}\mathrm{Log}(1+\Delta)$$

وباستخدام متسلسلة تايلر نحصل على:

$$D=\frac{1}{h}\left[\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3-....\right]$$

أي ان

$$Df(x)=f'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta f(x)-\frac{1}{2}\Delta^2 f(x)+\frac{1}{3}\Delta^3 f(x)-...\right]...(1)$$

فهـذه الـصيغة تعطـي المـشتقة الاولى للدالـة f(x) بدلالـة الفـروق الامامية Δ^k ومسافة h.

وهناك صيغة اخرى تقريبية مبسطة للمشتقة $f'(x)$ يمكن الحـصول عليها من الحد الاساسي في حساب المشتقة من العلاقة (1).

$$f'(x_o)=\frac{1}{h}\Delta f(x_o)=\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \quad ....(2)$$

كـما ان هنـاك صـيغة تقريبيـة ثالثـة مبـسطة للمـشتقة $f'(x)$ يمكـن الحصول عليها بدلالة الفروق الخلفية ∇ تشبه العلاقـة (1) التـي تعطـي $f'(x)$ بدلالة الفروق الامامية هي

$$f'(x_o)=\frac{\nabla f(x_o)}{h}=\frac{f(x_o)-f(x_o-h)}{h} \quad ....(3)$$

مثال 1-9:

استخدم الصيغتين (2) و (3) للفروق الامامية والخلفية للدالة $f(x)$ = $\operatorname{Sin} x$ عندما $h=0.1$ عند $x=1$.

باستخدام الصيغة (2)

$$f'(x)=\frac{0.891207-0.841471}{0.1}=0.49736$$

باستخدام الصيغة (3)

$$f'(x)=\frac{0.841471-0.783327}{0.1}=0.58148$$

9.1.2 صيغ عددية للمشتقات عند نقاط ليست بجدول البيانات:

فيما يلي بعض العلاقات المفيدة في الحصول على المشتقات المختلفة عند نقطة غير موجودة بالجدول مستخدمين صيغ الاستكمال للحصول على قيم للدالة عند نقاط ليست موجودة في الجدول، فاذا فاضلنا هذه الصيغ عدة مرات تعطينا الصيغة المطلوبة فمثلا العلاقة التالية للفروق الامامية لنيوتن.

$$y_k = \sum_{i=0}^{k} C_i^k \Delta^i y_o$$

$$= y_o + k\Delta y_o = \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \ldots$$

اذ ان

$$y_k = f(x_k),\ x_k = x = x_o + kh$$

فاذا فاضلنا طرفي العلاقة بالنسبة الى k ينتج:

$$\frac{d}{dk} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dx}{dk} = h \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dy_k}{d_k} = \frac{df(x_k)}{d_k} = h\frac{df(x_k)}{d_x} = hf'(x) = hf'(x_k) = h.f'(x_k)$$

وعليه فان:

$$hf'(x_k) = \Delta y_o + \frac{1}{2}(2k-1)\Delta^2 y_o + \frac{1}{6}(3k^2 - 6k + 2)\Delta^3 y_o \cdots$$

$$\therefore f'(x_k) = y'_k = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_o + \frac{1}{6}(3k^2 + 6k + 2)\Delta^3 y_o + \ldots\right] \ldots (4)$$

وبمفاضله الدالة (4) ينتج:

$$f''(x_k) = y''_k = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_o = (k-1)\Delta^3 y_o + \ldots\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

وبمفاضله الدالة (4) ينتج:

$$y'''_k = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_o + \ldots\right]$$

فاذا كانت x_k نقطة في الجدول فان k=0 بينما اذا لم تكن بالجدول فـان $k \neq 0$.

مثال2-9:

افرض ان f(x) دالة معلومة قيمها عند النقاط.

X	4	6	8	10
F	1	3	8	20

اوجد قيم y', y'', y''' عند النقاط $x = 4.5, x = 4$

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
4	1			
		2		
6	3		3	
		5		4
8	8		7	
		12		
10	20			

أ. عند النقطة x=4

$$y'(4)=\frac{1}{2}\left[2+\left(-\frac{1}{2}\right)(3)+\frac{2}{6}(4)\right]=\frac{11}{12}$$

$$y''(4)=\frac{1}{4}(3-4)=-\frac{1}{4}$$

$$y'''(4)=\frac{1}{8}(4)=\frac{1}{2}$$

ب. عند النقطة x=4.5.

ليست موجودة في الجدول واقرب نقطة لها هي X=4 لذلك فان $x_o=4$ وبذلك تكون.

$$k=\frac{4.5-4}{2}=\frac{1}{4}$$

$$y'(4.5)=\frac{1}{2}\left[2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)(3)+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{16}-\frac{6}{4}+2\right)(4)+\ldots\right]=\frac{41}{48}$$

$$y''(4.5)=\frac{1}{4}\left(3+\left(\frac{1}{4}-1\right)(4)\right)=0$$

$$y'''(4.5)=\frac{1}{8}(4)=\frac{1}{2}$$

9.2 التكامل العددي Numerical Inegration:

اذا كان لدينا التكامل المحدود التالي:

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

فقد يكون من الصعب او استحالة ايجاد قيمة هذا التكامل بالطرق التحليلية الاعتيادية حتى لو كانت الدالة ذا شكل تحليلي بسيط مثل:

$$\int_0^4 e^{-x^2}dx$$

او قد تكون الصيغة التحليلية للدالة f(x) غير معلومة وانما نعلم فقط بعض قيم الدالة عند نقاط مختلفة فنلجأ الى استخدام طرق التكامل العددي لايجاد تقريب لقيمة هذا التكامل. وهناك عدد كثير من طرق التقريب وفيما ياتي بعضها:

1ـ2ـ9 طريقة شبه المنحرف (المضلع المنحرف) Trapezoidal Rule:

تقوم هذه القاعدة بتقريب المساحة المطلوبة تحت منحني الدالة f(x) بالمساحة الواقعة تحت المستقيم الواصل بين نقطتين على منحني f(x) وكما في الشكل التالي:

اذ ان تلك النقطتين هما $(x_1,f(x_1))$ ، $(x_0,f(x_0))$ وبتطبيق قانون مساحة شبه المنحرف نحصل على:

$$I=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{x_1-x_0}{2}[f(x_0)-f(x_1)]$$

أي ان

$$I=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)];h=b-a$$

مثال3-9:

اوجد القيمة التقريبية للتكامل التالي بطريقة شبه المنحرف.

$$\int_0^1 (x^3+1)dx$$

الحل: من خلال التكامل نجد ان $x_1=1$، $x_0=0$ أي ان $h=1$

وان

$f(x) = x^3+1$

$f(x_0) = 1, \quad f(x_1)= 2$

وعليه فان:

$$\int_0^1 (x^3+1)dx = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2} = 1.5$$

مثال4-9:

جد قيمة تقريبية للتكامل $I = \int_0^2 (x^2+1)dx$

$h=1, f(x_0) = f(0) = 1 , f(x_1) = f(2) = 5$

$$I = \frac{1}{2}(1+5) = \frac{6}{2} = 3$$

فاذا عدنا لقاعدة الشكل الرباعي شبه المنحرف الاساسية والتي هي

تقريب للدالة f(x) وكتبت بدالة متعددة حدود من الدرجة الاولى بين النقطتين x_o، x_n مهما كانت صيغة الدالة، وعندما n>1 فان:

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_o}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \ .(1)$$

وبما ان

$$f(x) = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

ولكل فترة جزئية (x_i, x_{i+1}) وعند التعويض عن f(x) في الصيغة (1) ينتج:

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_o)+f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)] + \ldots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)] + E$$
$$= A_n + E$$

اذ ان A_n تسمى بالقاعدة العامة للشكل الرباعي شبه المنحرف، وان E هو الفرق بين القيمة التقريبية والقيمة الحقيقية. وان $h = \frac{x - x_o}{n}$

أي ان:

$$A_n = \frac{h}{2}[f(x_o) + f(x_n)] + h\sum_{i=1} f(x_i)$$

مثال5-9:

جد القيمة التقريبية للتكامل التالي مستخدما n=2، n=4، n=8

$$I = \int_0^1 f\left(x^2 + 1\right)dx$$

عندما n=2 فان $h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ وعليه فان:

$$A_2 = \frac{h}{2}\left[f(0) + f(1)\right] + hf\left(\frac{1}{2}\right)$$

لان مجال التكامل [0،1] قد قسم الى قسمين أي

$$A_2 = \frac{0.5}{2}(1+2) + \frac{1}{2}(1.25) = 1.375$$

باعتبار ان:

$$f(0) = 1 \text{ , } f(1) = 2 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.25$$

وعندما n=4 فان $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$ وان

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 1.0625 \text{ , } f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.25 \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = 1.5625$$

فان:

$$A_4=\frac{h}{2}[f(0)+f(1)]+h\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{0.25}{2}(1+2)+0.25(1.0625+1.25+1.5625)=1.34375$$

وعندما n=8 فان $h=\frac{1}{8}=0.125$ وان

$$A_n=\frac{0.125}{2}[f(0)+f(1)]+0.125\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{2}{8}\right)+...+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]$$

$$=1.33594$$

وعند زيادة قيمة n فان القيمة التقريبية للتكامل تقترب من القيمة الحقيقية له.

9.2.2 **قاعدة سمبسون** Simpson Rule:

اذا فرضنا ان $x_o=a$، $x_2=b$ وان $x_1=\frac{a+b}{2}$

أي ان

$$x_2-x_1=x_1-x_o=h$$

واذا فرضنا ان $f(x_o)$، $f(x_1)$، $f(x_2)$ جميعها معلومة. فان قاعدة سمبسون تقوم على اساس تقريب المساحة المطلوبة تحت منحني الدالة

$f(x)$ بالمساحة تحت منحني متعدد الحدود $p_2(x)$ الذي يمر بالنقاط $(x_o,f(x_o))$ ، $(x_1,f(x_1))$ ، $(x_2,f(x_2))$ وحسب الشكل التالي:

وبما ان

$$p_2(x) = C_o + C_1x + C_2x^2$$

أي ان

$$I = \int_a^b P_2(x)dx = \int_{x_o}^{x_2} (C_o + C_1x + C_2x^2)dx$$

اذ يمكن الحصول على قيم C_o، C_1، C_2 بالتعويض بالنقاط الثلاث في الدالة.

بعد تحليل الصيغة $p_2(x)$ نحصل على

$$I = \frac{h}{3}[f(x_o) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad ....(9\text{-}2)$$

اذ ان

$$h = x_1 - x_o = x_2 - x_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{x_2 - x_o}{2}$$

وتسمى الصيغة (2-9) السابقة بصيغة سمبسون البسيطة.

مثال6-9:

احسب قيمة التاكمل التالي بقاعدة سمبسون

$$I = \int_1^3 \left(x^3 - 2x^2 + 7x - 5\right)dx$$

$x_o = 1$ $x_1 = 2$ $x_2 = 3$ $h = 1$

$f(x_o) = 1$ $f(x_1) = 9$ $f(x_2) = 25$

$$I = \frac{1}{3}[f(1) + 4f(2) + f(3)] = \frac{1}{3}[1 + 4(9) + 25] = \frac{62}{3}$$

وعند تجزئة مجال الدالة f(x) الى اجزاء عددها n (عدد زوجـي) فـان صيغة سمبسون تصبح:

$$I = \int_{x_o}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}\begin{bmatrix} f(x_o) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) \\ + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \end{bmatrix}$$

مثال7-9:

احسب القيمة التقريبية للتكامل التالي بطريقة سمبسون عندما n = 4

$$x_o = 0 \, , x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$$

$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$I=\frac{h}{3}[f(x_o)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$

$$I=\frac{0.25}{3}\left[f(0)+4f\left(\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right]$$

$$=\frac{0.25}{3}(0+1.015625+1.125+4.265625+2)=0.70052$$

9.2.3 صيغ نيوتن كوتس المفتوحة

Open Newton – Gotes formula:

ان قواعد الشكل الرباعي شبه المنحرف وسمبسون من القواعد التي تسمى بقواعد نيوتن – كوتس للتكامل وهناك قواعد اخرى تنتمي الى هذه العائلة ولكن جميعها نفرض ان:

$$h=\frac{x_n-x_o}{n}, \qquad x_o<x_1<x_2\ldots\ldots<x_n$$

وهناك قواعد اخرى تذكر منها ما ياتي:

1. قاعدة $\frac{3}{8}$ لسمبسون والمتمثلة بالصيغة التالية:

$$\int_{x_o}^{x_3}f(x)dx=\frac{3}{8}h[f(x_o)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$

2. قاعدة بول Bool's Rule وصيغتها هي:

$$\int_{x_o}^{x_4} f(x)dx = \frac{2}{45}h[7f(x_o)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

3. يمكن كتابة الصيغة العامة لنيوتن – كوتس والتي تضم الصيغتين السابقتين ما ياتي:

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)dx = Ch[C_o f(x_o)+C_1 f(x_1)+\ldots+C_n f(x_n)]$$

علما بان قيم C، C_i هي الموضحة في الجدول التالي:

n	C	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
1	½	1	1							
2	1/3	1	4	1						
3	3/8	1	3	3	1					
4	2/45	7	32	12	32	7				
6	1/140	41	216	27	272	27	216	41		
8	4/14175	989	5888	-928	10496	-4540	10496	-928	5888	989

اما الصيغ من الدرجات الاعلى فنادرا ما تستخدم، بسبب وجود صيغ متاحة ابسط وتساويها في الدقة.

مثال8-9:

استخدم صيغة نيوتن كوتس المفتوحة لايجاد قيمة التاكمل التالي عندما n=2.

$$\int_{1}^{1.3} \sqrt{x}\, dx$$

$$x_o = 1 \qquad x_1 = 1.15 \qquad x_2 = 1.3$$

$$\int_{1}^{1.3} \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{3} h[f(x_o)4f(x_1)+f(x_2)]$$

$$f(x_o)=\sqrt{1}=1 \qquad f(x_1)=\sqrt{1.15}=1.072380529$$

$$f(x_2)=\sqrt{1.3}=1.140175425 \qquad h= 0.15$$

$$I=\frac{0.15}{3}[1+4(1.072380529+1.140174525)]=0.321484877$$

تمارين الفصل التاسع

1. الجدول التالي يعطي بعض قيم $y = f(x)$.

X	1.08	1.12	1.16	1.2
y	0.295	0.295	0.290	0.28

استخدم صيغة الفروق للامام والفروق للخلف لايجاد مشتقة الدالة عندما $x = 2.5$ علما بان $h = 0.1$.

2. الجدول الاتي يعطي قيما للتطبيق y اوجد قيمة المشتقة y', y'' عندما $x = 0.5$.

X	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65
y	1.521525	1.505942	1.487968	1.467462	1.444243	1.418083	1.388686

3. اوجد قيمة تقريبية لـ $f'(x)$ عندما $x= 0.35$ اذ ان f معرفة بالقيم التالية:

X	0.1	0.2	0.3	0.4
F(x)	0.90484	0.81873	0.754082	0.67032

4. استخدم كلا من قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون لحساب قيمة التكامل.

$$\int_{0}^{\pi/2} f(x)dx$$

باستخدام البيانات التالية

X	0	$\pi/12$	$2\pi/12$	$3\pi/12$	$4\pi/12$	$5\pi/12$	$\pi/2$
F(x)	0	0.25882	0.5	0.70711	0.86603	0.96593	1

5. احسب قيمة التكامل

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$$

باستخدام قاعدة سمبسون متخذا $h = 0.25$.

6. استخدم قاعدة شبه المنحرف متخذا $h = 0.5$ مرة و $h = 0.25$ مرة اخرى عندما $n = 2$، $n=4$ لايجاد تقريب التكامل التالي:

$$\int_{1}^{2} \frac{e^{x}}{1+x} dx$$

7. احسب لثلاثة ارقام عشرية لايجاد قيمة التكامل التالي بطريقة سمبسون عندما n = 2.

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

8. البيانات التالية تمثل قيم معلومة للدالة $f(x) = e^x$ احسب قيمة التكامل $\int_{1}^{2} f(x) dx$.

أ. بطريقة شبه المنحرف عندما n=4، n=6.

ب. بطريقة سمبسون عندما n=2، n=4.

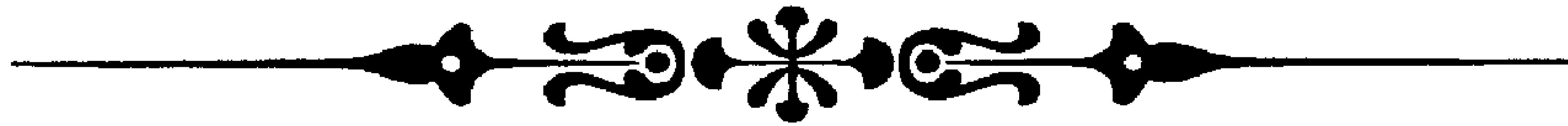
X	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1
F(x)	3.004	3.669	4.482	5.474	6.686	8.199

9. استخدم صيغة نيوتن – كوتس لايجاد قيمة التكامل التالي عندما n=2، n=3.

$$\int_{1}^{1.4} \frac{1}{x} dx$$

10. استخدم كل الصيغ المتوفرة لديك لايجاد قيمة التكامل التالي عنـدما n=4 مع مقارنة بين نتائج الصيغ لتحديد ادقها.

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$$






الفصل العاشر
الحلول العددية للمعادلات التفاضلية
The Numerical Solution of Ordinary Differentiation Equations

10-1 المقدمة:

10-2 طرائق حل المعادلات التفاضلية:



الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

10-1 المقدمة:

في الفصول السابقة تم التطرق الى طرائق حل المعادلات التفاضلية بالطرائق التحليلية منها فصل المتغيرات، والعامل التكاملي وغيرها. ولكن معظم المعادلات التفاضلية التي نحصل عليها في الحياة العملية التطبيقية هي من النوع الذي لا يمكن ايجاد حلها بالطرق التحليلية وان المطلوب ايجاد قيم عددية للحل فانه بالامكان استخدام الطرق العددية لايجاد حل لهذه المعادلات التفاضلية.

فاذا كان لدينا $y' = f(x, y)$ والمطلوب حل هذه المعادلة التفاضلية لقيمة معينة x، فيمكن تجزئة مجال الدالة ولنفرض انه [a,b] الى n من الاجزاء ثم نجد x_i اذ ان $x_i = x_{i-1} + h$ ، $x_0=a$ وان $h = \frac{b-a}{n}$ ثم نجد $f(x_1)...f(x_n)$ بواسطة الطرائق العددية من المعروف ان f(xi) هي قيم تقريبية. ان بعض هذه الطرائق تحتاج الى قيمة ابتدائية واحدة هي x_0 لغرض ايجاد قيمة جديد لـ f(x) والتي تسمى بطرائق الخطوة الواحدة اما

الطرائق الاخرى تحتاج الى عدة قيم ابتدائية وسنتطرق في هذه الفصل الطرائق التي تحتاج قيمة واحدة وهي:

10-2 طرائق حل المعادلات التفاضلية:

10-2-1 صيغة اويلر Euler's Formula:

لنفرض لدينا المعادلة التفاضلية.

$$y' = f(x, y) \qquad . \quad f(x_o) = y_o$$

فان ابسط الطرائق التقريبية لحل المعادلة التفاضلية هي صيغة اويلر التالية:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

اذ نجد قيمة y_{n+1} التي هي القيمة التقريبية لـ y عندما $x=x_{n+1}$ وان $h=x_{n+1}-x_n$.

مثال 10-1:

اوجد قيمة f(0.2) للمعادلة التفاضلية $f'(x) = -xy$ علما بان $f(0)=0.5$

$x_o = 0 \qquad f(x_o) = 0.5 \ , \qquad x_1 = 0.2 \qquad h = 0.2$

$y_1 = y_o + hf(x_o, y_o) = 0.5 + 0.2\ (0 \times 0.5) = 0.5$

مثال2-10:

اوجد القيمة التقريبية f(1.1) للمعادلة التفاضلية $f'(x) = xy^2$ علما بان f(1)=2.

$x_o = 1 \qquad x_1 = 1.1\ , \qquad h = 0.1 \qquad y_o = 2$

$y_1 = f(1.1) = y_o + hf(x_o, y_o)$

$= 2 + 0.1\ (4) = 2.4$

ان صيغة اويلر تعطي قيم تقريبية بعيدة عن القيم الحقيقية، لذلك اجريت بعض التعديلات عليها ونتجت عنها صيغ اخرى مطورة كما سيرد ذكرها في الصيغ اللاحقة.

10-2-2 **صيغة تايلر** Taylors Formula:

بالامكان استخدام مفكوك تايلر لايجاد $f(x_o+h)$ وكما ياتي:

$$f(x_o + h) = f(x_o) + hf'(x_o) + \frac{h^2}{2!} f''(x_o) + ...$$

وبالامكان استخدام بعض تلك الحدود من هذه المتسلسلة التي تعتمد على قيمة h فكلما كانت صغيرة فنحتاج الى عدد قليل من الحدود. وسيكون الناتج هو تقريبي. وان صيغة تايلر هي:

$y_{n+1} = y_n + h y'_n = y_n + hf\,(x_n, y_n)$

أي ان

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n$$

مثال3-10:

اوجد القيمة التقريبية f(1.1) باستخدام صيغة تايلر من الرتبة الثانية والرتبة الخامسة للمعادلة $y' = -y$ علما بان f(1)=2.

الحل:

$$f(x,y) = -y, \qquad y' = -y$$

وان

$$y'' = \frac{df(x,y)}{dx} + \frac{df(x,y)}{dy}.y' = -y' = y$$

أي ان

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n = y_n - hy_n + \frac{h^2}{2!} y_n$$

$$y_1 = y_o - hy_o + \frac{h^2}{2!} y_o = 2\left(1 - 0.1 + \frac{0.12}{2}\right) = 1.81$$

اما من المرتبة الخامسة فهي:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \frac{h^4}{4!}y''''_n + \frac{h^5}{5!}y'''''_n$$

وبالنسبة للمثال نجد ان:

$$y''' = -y \qquad y'''' = y \quad , \qquad y''''' = -y$$

أي ان:

$$y_{n+1} = y_n + hy_n - \frac{h^2}{2!}y_n - \frac{h^3}{3!}y_n + \frac{h^4}{4!}y_n - \frac{h^5}{5!}y_n$$

وعند التعويض عن $x_o=1$، $h=0.1$، $n=0$ نحصل على:

$$y_1 = \left(1 - 0.1 + \frac{0.1^2}{2!} - \frac{0.1^3}{3!} + \frac{0.1^4}{4!} - \frac{0.1^5}{5!}\right) = 1.80967$$

مثال4-10:

استخدم صيغة تايلر للحصول على حل للمعادلة التفاضلية $y' = x^{1/3}$ اذ ان $f(1) = 1$ ثم اوجد $f(1.1)$.

$$y' = xy^{1/3}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{3}x^2y^{-1/3} + y^{1/3}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{1}{9}x^3y^{-1}+xy^{-1/3}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{1}{9}x^4y^{-5/3}-2/3x^2y^{-1}+y^{-1/3}$$

$$f(1.1)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f^{(2)}(x)+\frac{1}{6}h^3f^{(3)}(x)+\frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x)$$

$x=1$, $h=0.1$

$$f(1.1)=1+0.1+\frac{2}{3}(0.1)^2+\frac{4}{27}(0.1)^3+\frac{1}{54}(0.1)^4=1.10682$$

10-2-3 طريقة اويلر المطورة

Modified Euler Method:

ان طريقة اويلر تستخدم قيمة y_n لحساب القيمة التقريبية y_{n+1} وهذه القيمة لا تكون دقيقة بشكل عام. فيمكن تحسين قيمة الدالة y_{n+1} في النقطة x_{n+1} وذلك بإعادة احتساب قيمة y_{n+1} من معادلة الخط المستقيم بدلالة معدل ميل بداية ونهاية الفترة وكما ياتي:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})] \qquad ((10-2)$$

ان قيمة y_{n+1} غير معروفة ضمن العلاقة (2-10) ويتم تخمينها باستخدام طريقة اويلر.

ويمكن اعادة حساب قيم متعاقبة لـ y_{n+1} باستخدام احد الطرق التكرارية ولتكن $y_{n+1}^{(0)}$ تمثل قيمة اولية لـ y_{n+1} فيمكن اعادة كتابة العلاقة (2-9) بالشكل التالي:

$$y_{n+1}^{(r+1)} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(r)}\right)\right]$$

مثال5-10:

استخدم صيغة اويلر المطورة لحل المعادلة $y^1 = x - \frac{y}{2x}$ عندما $x_o=1$، $y_o=0.25$ $h=0.04$ على ان تكون النتائج لخمسة مراتب عشرية لقيم x من 1 الى 1.2.

$$f(x_o, y_o) = 1 - \frac{0.25}{2} = 0.875$$

$$y_1^{(1)} = y_o + hf(x_o, y_o) = 0.25 + 0.04 * 0.875 = 0.285$$

$$f\left(x_1, y_1^{(1)}\right) = 1.04 - \frac{0.2850}{2(1.04)} = 1.04 - 0.13701923 = 0.90298$$

$$y_1^{(2)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o, y_o) + f\left(x_1, y_1^{(1)}\right)\right]$$

$$= 0.25 + \frac{0.04}{2}[0.875 + 0.90298] = 0.28555$$

$$f\left(x_1, y_1^{(2)}\right) = 1.04 - \frac{0.28555}{2(1.04)} = 0.9027163$$

$$y_1^{(3)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o, y_o) + f\left(x_1, y_1^{(2)}\right)\right]$$

$$= 0.25 + \frac{0.04}{2}[0.875 + 0.9027] = 0.28555$$

ولايجاد النقطة الثانية $y_2^{(3)}$ فان:

$$f(x_1, y_1) = 1.04 - \frac{0.28555}{2(1.04)} = 0.90271$$

$$= 0.28555 + 0.04 * 0.9027163 = 0.3216586$$

$$y_2^{(1)} = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$f\left(x_2 y_2^{(1)}\right) = x_2 - \frac{y_2^{(1)}}{2x_2} = 1.08 - \frac{0.3216586}{2(1.08)} = 0.9310839$$

$$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f\left(x_2, y_2^{(1)}\right)\right] = 0.322226$$

$$f\left(x_2, y_2^{(2)}\right) = 1.08 - \frac{0.322226}{2(1.08)} = 0.93082$$

$$y_2^{(3)} = 0.3222207$$

فعند الاستمرار نجد ان:

$y_3^{(3)} = 0.3600$ عندما $x= 1.12$

$y_4^{(3)} = 0.3990$ عندما $x= 1.16$

$y_5^{(3)} = 0.4391$ عندما $x= 1.2$

والقيمة الاخيرة $y_5^{(3)} = 0.4391$ مساوية للقيمة الحقيقية التي يمكن ايجادها من العلاقة التالية:

$$f(x) = 0.4x^2 - \frac{0.15}{\sqrt{x}}$$

$$f(1.2) = 0.4(1.2)^2 - \frac{0.15}{\sqrt{1.2}} = 0.576 - 0.136930639 = 0.4391$$

10ـ2ـ4 **طريقة رانج – كوتا** Ranch – Kutta Method:

ان طريقة اويلر من الناحية العملية فائدتها قليلة لانها تتطلب ان تكون قيمة h صغيرة جدا للحصول على الدقة الجيدة. اما هذه الطريقة فتعطي الدقة الجيدة وبجهد اقل حيث لا تحتاج الى حساب المشتقات كما في صيغة تايلر وانما ايجاد قيمة الدالة f (x,y) عدة مرات لنقاط مختارة في كل فترة من الفترات الصغيرة للمجال المطلوب.

توجد صيغ مختلفة لطريقة رانج – كوتـا او اربعـة رتـب وان اكثرهـا شيوعا واستخداما هي صيغة الرتبـة الرابعـة حيـث تعطـي نتـائج دقيقـة وسهلة الاستخدام وان اشتقاقها يعتمد على مفكوك تايلر وطريقـة اويلـر وان الصيغة للرتبة الرابعة هي:

$$y_n = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

مثال**10-10**:

استخدم طريقة رانج – كوتا من الرتبة الرابعة لحل المعادلة التفاضلية $y' = x - \frac{y}{2x}$ من 1-1.2 عندما h=0.04 مـرة و $h = 0.1$ مـرة اخـرى وان $y_o = 0.25$.

الحل:

$$x_o = 1 \quad y_o = 0.25$$

$$y_1 = y_o + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

ولايجاد y_1 تحسب k_1، k_2، k_3، k_4، حيث $n=0$ أي ان:

$$k_1 = f(x_o, y_o) = x_o - \frac{y_o}{2x_o}$$

$$f(1,0.25) = 1 - \frac{1.25}{2\times1} = 0.875$$

$$k_2 = f\left(x_o + \frac{h}{2}, y_o + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$= f\left[1 + \frac{0.04}{2}, 0.25 + \frac{0.04}{2}(0.875)\right]$$

$$= f(1.02, 0.2675) = 0.8889$$

$$k_3 = f\left(x_o + \frac{h}{2}, y_o + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$= f\left[1 + \frac{0.04}{2}, 0.25 + \frac{0.04}{2}(0.8889)\right] = f(1.02, 0.2678)$$

$$=1.02-\frac{0.2678}{2(1.02)}=0.8889$$

$$k_4=f(x_o+h,y_o+hk_3)$$

$$=f[1+0.04,0.25+0.04(0.8889)]$$

$$=f(1.04,0.2856)$$

$$=1.04-\frac{0.2856}{2(1.04)}=0.9027$$

وعليه فان:

$$y_1=0.25+\frac{0.04}{6}[0.875+2(0.8889)+2(0.8889)+0.9027]$$

$$=0.2856$$

ولحساب قيمة y_2 يعاد حساب k_1، k_2، k_3، k_4، مرة اخرى مستخدمين y_1 وكما ياتي:

$$k_1=f(x_1,y_1)=f(1.04,0.2856)=0.9027$$

$$k_2=f\left(x_1+\frac{h}{2},y_1+\frac{h}{2}k_1\right)=f(1.06,0.3037)=0.9167$$

$$k_3=f\left(x_1+\frac{h}{2},y_1+\frac{h}{2}k_3\right)=f(1.06,0.3139)=0.9167$$

$$k_4=f(x_1+h,y_1+hk_3)=f(1.08,0.3223)=0.9308$$

أي ان:

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + k_3 + k_4)$$

$$y_2 = 0.2856 + \frac{0.04}{6}[0.9027 + 2(0.9167) + 2(0.9167) + 0.9308]$$

$$= 0.3223$$

وبنفس الاسلوب يمكن حساب y_3، y_4، y_5، y_6 والجدول الاتي يمثل النتائج العددية.

عندما h=0.04.

X	Y
1	0.25
1.04	0.2855529
1.08	0.3222224
1.12	0.3600233
1.16	0.3989685
1.2	0.4390694

عندما h=0.1.

X	Y
1	0.25
1.1	0.3409806
1.2	0.4390697

تمارين الفصل العاشر

1. استخدم طريقة لحل المعادلات التفاضلية التالية:

أ. $y' = x - 2y + 1$ لقيم x=1 الى 1.5 اذ ان h=0.1 وان القيمة الابتدائية هي (1،3).

ب. $y' = x + y$ لقيم x=0 الى 0.5 اذ ان h=0.2 وان القيمة الابتدائية (0،1).

2. استخدم طريقة تايلر لايجاد حل المعادلات التفاضلية التالية:

أ. $y' = 2(3x + y)^3 - 1$ لقيم x=[0,0.4] وان h=0.1 اذ ان f(0)=1.

ب. $y' = \dfrac{x^3 - 2y^3}{3xy^2}$ لقيم x=[1,2.2] وان h=0.4 اذ ان f(1)=1.

3. استخدم طريقة رانج – كوتا (الرتبة الرابعة) لايجاد حل المعادلات التفاضلية في التمرين الاول.

4. اوجد المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ عندما f (0)=1 وان h=0.02 لقيم x=[0,0.1] باستخدام.

أ. طريقة اويلر.

ب. طريقة تايلر.

ج. طريقة رانج – كوتا.

وقارن النتائج مع الحل الحقيقي هو 1.1103 عندما $x=0.1$.

5. استخدم طريقة اويلر لايجاد المعادلة التفاضلية $y' = -y$ اذ ان القيمة الابتدائية هي $y = 1$ عندما $x=0$ على ان يكون الناتج لاربع مراتب للقيم 0.2، 0.4، 0.6، 1.

6. جد حل المعادلة التفاضلية $y' = x - y^2$ عندما $x=[0,0.8]$ مستخدما $h=0.1$ باستخدام.

أ. طريقة اويلر.

ب. طريقة اويلر المطورة.

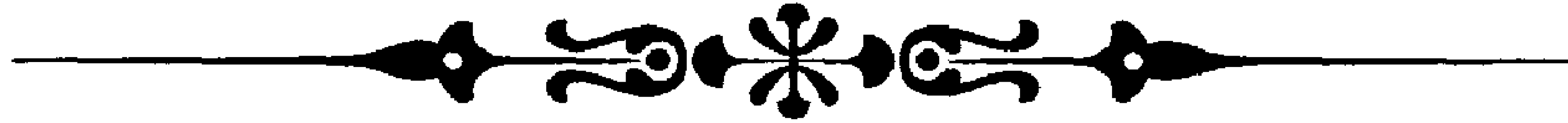
ج. طريقة رانج – كوتا من الرتبة الرابعة.

7. استخدم طريقة تايلر على المعادلة $y' = -xy^2$ للحل الذي يحقق $f(0)=2$ للقيم $x=[0,0.4]$ مستخدما $h=0.1$.

8. طبق طريقة رانج – كوتا على f (1)=1 للمعادلة التفاضلية $y^1 = xy^{1/3}$ عندما h=0.1 وان $x_0=1$.

9. استخدم طريقة اويلر على المعادلة $y' = -xy^2$ علما بان f (0)=2 للقيم x=[0,1] مستخدما h=0.2.

10. استخدم طريقة اويلر المطورة لحل المعادلة التفاضلية $y' = x^2 - y^2$ لقيم x=[1,1.5] علما بان h=0.2 اذ ان f(1)=1.



المصادر العربية

1. بوردين ريتشارد، فاريز. دوكلاص " التحليل العددي" ترجمة السامرائي، خالد احمد مطبعة وزارة التعليم العالي والبحث العلمي 1992.

2. الشمري. د. محمد علي "التحليل العددي" سلسلة ملخصات سشوم، دار كاكرد حصيل للنشر 1981.

3. السيد. د. ابو بكر احمد "التحليل العددي" دار العلم للنشر والتوزيع، الكويت، 1988.

4. علي. د. علي عزيز، الحسوان، عبد الرزاق، حسين، عادل نبيل "مبادئ الرياضيات والتفاضل والتكامل" دار الكتب للطباعة والنشر جامعة الموصل 1980.

5. عبيد. طالب عبد الصمد "مبادئ الطرق العددية" مطبعة دار الحكمة – جامعة البصرة 1992.

6. عبد المطلب. د. إبراهيم، د. احمد عزت رياض، "رياضيات متقدمة للدراسات الهندسية" الجزء الثاني مطبعة التعليم العالي بغداد. الطبعة الأولى 1989.

7. عبد علي. د. سليم حسن، د. نعوم. رياض شاكر "طرق رياضية متنوعة" دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل 1978.

8. عبد الحسين. عباس حميد، عبد الوهاب. نجلاء "الرياضيات" دار الكتب للطباعة والنشر. جامعة الموصل 1991.

9. اللامي. د. كاظم محمد حسين، "مقدمة في التحليل العددي" مطبعة دار الكتب للطباعة والنشر 1987.

المصادر الأجنبية

10. Brauer. F,John. A. No hel "Ordinary differential equations" 2nd edition W.A. Benjamin Inc. London, 1973.

11. Frank. A "Differential equations" Mc Graw Hill, New York, 1972.

12. Green. S.L. "Introduction to differential equations" University Tutorial Press LTD 1969.

13. Myron B. Allen, Eli L. Isaaxson "Numerical Analysis For Applied Science" John Wiley and Sons. Inc 1998.

14. Tranter. C.J "Advance level pure Mathematics" The English university press LTD, London, 1961.

15. Vzailser. V, Skavavi. M.I, "Elementary Mathematics" 1978, MIR publishers Moscow .

16. William S.D and Daniel, "Numerical Methods" John Wiley & Sons Inc, 1972.

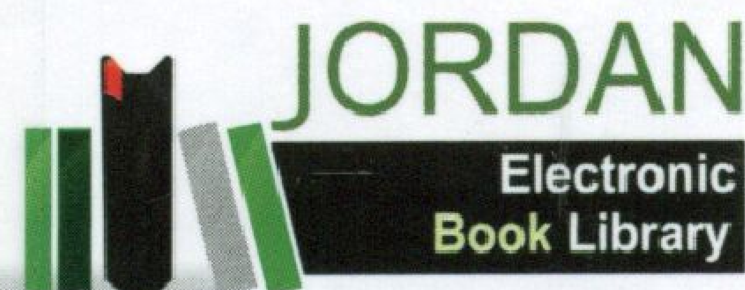
الرياضيات والتحليل العددي

وكلاء وموزعي دار اليازوري في العالم

الدولة	المدينة	اسم الدار	الهاتف	الدولة	المدينة	اسم الدار	الهاتف
الأردن	عمان	الإدارة العامة	5690904	الأردن	إربد	حمادة للنشر والتوزع	02 7270100
الأردن	عمان	فرع عمان	5690904	الأردن	الكرك	فرع الدار في الكرك	03 2302111
السعودية	الرياض	مؤسسة الجريسي	4039328	ليبيا	طرابلس	مكتبة طرابلس	213601583
السعودية	الرياض	دار الزهراء	4641144	ليبيا	طرابلس	دار الحكمة	213606571
السعودية	الرياض	مكتبة العبيكان	4650071	ليبيا	طرابلس	الدار العربية للكتاب	3330384
السعودية	الرياض	مكتبة جرير التجارية	4626000	ليبيا	طرابلس	دار الرواد	3350333
السعودية	الرياض	مكتبة الخريجي	4646258	العراق	بغداد	مكتبة دجلة	0096418170792
السعودية	جدة	مكتبة كنوز المعرفة	6570628	العراق	الموصل	دار ابن الأثير	7702036776
السعودية	الدمام	مكتبة المتنبي	8272906	العراق	بغداد	مكتبة الذاكرة	796449420
السعودية	المنورة	مكتبة الزمان	8366666	الكويت	الكويت	مكتبة ذات السلاسل	466255
السعودية	الرياض	مكتبة الرشد	4593451	فلسطين	غزة	مكتبة سمير منصور	97082825688
السعودية	الرياض	دار المريخ	4657939	فلسطين	رام الله	مكتبة الشروق	02-2961614
السعودية	الرياض	مكتبة الشقري	4611717	فلسطين	الخليل	مكتبة دنديس	2225174
السعودية	جدة	تهامة للنشر	65152845	فلسطين	رام الله	دار الرعاة	22961613
السعودية	جدة	مكتبة المأمون	6446614	فلسطين	غزة	مكتبة اليازجي	287099
السعودية	مكة المكرمة	مكتبة الثقافة	5429049	سورية	دمشق	مكتبة النوري	2311189
الجزائر	الجزائر	دار الثقافة العلمية	21541135	سورية	حلب	دار القلم العربي	2113129
الجزائر	وهران	دار ابن النديم	41359788	السودان	الخرطوم	الدار السودانية للكتب	6780031
الجزائر	الجزائر	دار الكتاب الحديث	354105	البحرين	المنامة	المكتبة الوطنية	293840
الجزائر	الجزائر	مؤسسة الضحى	214660	البحرين	المنامة	المكتبة العلمية	7786300
الجزائر	الجزائر	دار ابن باديس	645900	البحرين	المنامة	مؤسسة الايام	725111
الجزائر	وهران	دار العزة والكرامة	41540793	البحرين	المنامة	مكتبة فخراوي	591118
الجزائر	قسنطينة	دار اليمن	961869	فرنسا	باريس	معهد العالم العربي	140513809
الجزائر	قسنطينة	انفودك	770906434	المغرب	أغادير	مكتبة وراقة ا[illegible]	0528217144
الجزائر	الجزائر	دار البصائر	495735	المغرب	الدار البيضاء	المركز الثقافي ا[illegible]	[illegible]
الجزائر	الجزائر	مكتبة الأصالة	243602	سلطنة عمان	روي	مكتبة القرآن [illegible]	[illegible]
الجزائر	الجزائر	دار الهدى	021966220	المملكة المتحدة	لندن	مكتبة الس[illegible]	[illegible]
مصر	مدينة نصر	دار الشروق	4023399	أميركا	لوس أنجلس	مكتبة جر[illegible]	[illegible]
مصر	القاهرة	مكتبة مدبولي	5756421	اليمن	صنعاء	الدار العلم[illegible]	[illegible]
مصر	القاهرة	دار الفجر	6246252	اليمن	صنعاء	دار العلوم ال[illegible]	[illegible]
مصر	القاهرة	الهيئة المصرية العامة	25775371	اليمن	صنعاء	دار الكلم[illegible]	[illegible]
مصر	القاهرة	مجموعة النيل العربية	2026717135	اليمن	صنعاء	دار الكتاب الج[illegible]	[illegible]
مصر	القاهرة	الشركة العربية المتحدة	22705844				



اليازوري
دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع
عمان - وسط البلد - شارع الملك حسين
هاتف: 4626626 6 962+ تلفاكس: 4614185 6 962+
ص. ب: 520646 الرمز البريدي: 11152
info@yazori.com www.yazori.com




9 789957 126230